

Primer parcial 2008 – 22 de agosto de 2008

Ejercicio 1 (20)

Sea $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

1. Dar una relación de $B \times B$ asimétrica y cuyo cardinal sea 5. (3)
2. Dar una relación S de $B \times B$, tal que $|S| = 7$, S es antisimétrica, irreflexiva y transitiva (5)
3. Dar una relación simétrica P , tal que $S \cap P = \emptyset$ (6)
4. Dada la partición Π de B , $\Pi = \{\{d, a\}, \{g\}, \{e, b, f\}, \{c\}\}$, dar por extensión una relación $R \subseteq B \times B$, tal que el conjunto de clases de equivalencia determinado por R sobre B sea Π . (6)

Ejercicio 2 (14)

Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x + (y - 3) = 3\}$

1. Dé 3 elementos de R , tales que la primer componente x , sea mayor que 0 y la segunda menor que 0. (3)
2. Indicar si R verifica las siguientes propiedades, justificando en cada caso: (9)
 - Simétrica
 - Transitiva
 - Reflexiva
 - Asimétrica
 - Antisimétrica
 - Irreflexiva
3. ¿Es R una relación de equivalencia? Justifique. (2)

Ejercicio 3 (36)

Se dan las siguientes funciones:

$u: P(\mathbb{Z}) \times P(\mathbb{Z}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$

$u((x, y)) = x \cup y$

$i: P(\mathbb{Z}) \times P(\mathbb{Z}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$

$i((x, y)) = x \cap y$

$d: P(\mathbb{Z}) \times P(\mathbb{Z}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$

$d((x, y)) = x - y$

$s: P(\mathbb{Z}) \times P(\mathbb{Z}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$

$s((x, y)) = x \oplus y$

$c: P(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{N}$

$c(x) = |x|$

Sean $A = \emptyset$, $B = \{-1, 0, 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}, x > 0 \wedge x = x^2 - 2\}$, $D = \mathbb{N}$

1. Calcular: (12)
 - a. $u((A, C))$
 - b. $(c \circ i)((A, B))$
 - c. $i((d((B, C)), s((B, C))))$
 - d. $d((s((B, A)), C))$
 - e. $(c \circ d)((C, D))$
 - f. $s((i((B, D)), D))$
2. Indicar si las funciones u , i , d , s y c son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas, justificando para cada caso (10)
3. Indique si i^{-1} y c^{-1} son funciones o simplemente relaciones, justifique. (4)

4. Sea $f: P(Z) \rightarrow P(Z)$

$$f(x) = d((Z, x))$$

Clasifique f , justificando (6), indique si existe f^{-1} (1), y en caso afirmativo dar una expresión para ella (3). (10)

Ejercicio 4 (50)

En la escuela N° 700 de la localidad XYZ, en la clase N° 700 que tiene 22 alumnos, se deben repartir las laptop entregadas por el Plan Ceibal el día X. La tarea de distribuirlas es de la maestra del grupo.

- a) Para repartirlas debe hacerlo alumno por alumno, ya que debe anotar todos los datos del niño en una planilla. ¿Cuántas formas para elaborar la lista de alumnos con XO tiene si no establece ningún criterio a priori para ir seleccionando los alumnos de a uno? (3)
 - b) La maestra decide adoptar un criterio, las entregará en orden alfabético considerando únicamente la primer letra del apellido de cada niño. ¿Cuántas posibilidades tiene ahora, si en la clase hay 4 niños cuyo apellido comienza con J, 6 con A, 5 con E, 5 con K y el resto con Z? (5)
 - c) Ocurrió un imprevisto, y a la clase llegaron 14 XO y no 22, como se esperaba. La maestra se pone a pensar diferentes alternativas para repartir las 14 de la forma más equitativa:
 1. Si opta por no usar ningún criterio, como en la parte a, y los va llamando de a uno ¿cuántas posibilidades existen? (3)
 2. Si decide usar el criterio de la parte b, y repartir las 14 hasta que se terminen, ¿cuántas posibilidades existen? (4)
 3. Decide poner todos los nombres de los alumnos en papeles dentro de una bolsa y de allí, sacar 14 papeles, ¿cuántas posibilidades para la elección tiene en este caso? (4)
 4. En la clase hay 12 niñas. Decide repartir la mitad a los niños y la mitad a las niñas, utilizando el criterio de la bolsa. ¿Cuántas posibilidades tiene? (4)
 - d) Más imprevistos, de las 14 que llegaron hay 4 que están bloqueadas y decide no entregarlas hasta que las desbloqueen. Pero la maestra se da cuenta de algo que no había tenido en cuenta antes: en la clase hay trillizos, 3 pares de mellizos y dos hermanos de diferente edad, pero uno de ellos repite.
 1. Decide repartir las que le quedan de forma de no entregar más de una a una familia y utiliza el método de la bolsa, ¿cuántas opciones tiene? (5)
 2. La maestra maneja una nueva opción: decide obligatoriamente entregar una laptop por familia con más de un hermano en la clase y el resto repartirlas con el criterio de la bolsa, ¿cuántas opciones tiene ahora? (5)
 3. Una vez resuelto el problema anterior se le presenta un nuevo problema a la maestra: ¿a cuál de los hermanos en cada familia entrega la XO?, todos se la quieren llevar. ¿Cuántas opciones tiene para repartir la XO entre hermanos la agotada maestra? (5)
 4. Por fin, la maestra de la clase N° 701 viene a avisarle que a ella le hicieron mal el cálculo y le sobraron 6 XO, así que se las da para resolver sus problemas. Ahora sí, puede repartir una a cada familia de la clase.
 - i. ¿De cuántas formas podrá hacerlo si usa el criterio de llamar de a uno a los 22? (6)
 - ii. ¿Y si usa el de la bolsa? (6)
- En los dos casos anteriores no considera a cuál de los hermanos se la da.