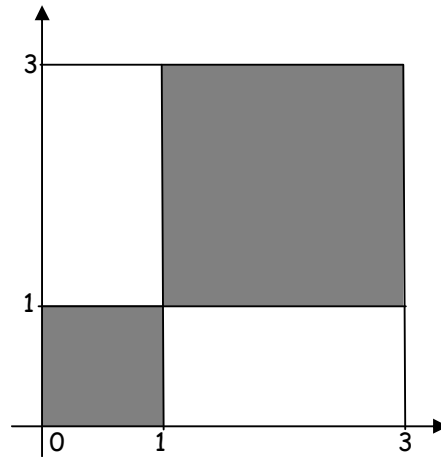


## RELACIONES

- 1) Dados los conjuntos:  $A = \{a, b, c, d\}$ ;  $B = \{1, 2, 3\}$ ;  $C = \{a, c, 2, 3\}$   
 $R_1 = \{(a, 2), (a, 1), (b, 3)\}$ ;  $R_2 = \{(a, 1), (c, 1)\}$ ;  $R_3 = \{(2, a), (3, c), (2, c)\}$  y  
 $R_4 = \{(x, y) / x = y, x \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 3\}$
- a) Investiga si las siguientes son relaciones en los conjuntos que se indican:  
 $R_1: A \rightarrow B$ ;  $R_3: A \rightarrow B$ ;  $R_2: A \rightarrow B$ ;  $R_2: A \rightarrow C$ ;  $R_3: B \rightarrow A$ ;  
 $R_3: B \rightarrow C$ ;  $R_3: C \rightarrow B$ ;  $R_4: B \rightarrow B$ ;  $R_4: B \rightarrow C$ ;  $R_1: A \rightarrow C$
- b) Representa mediante diagramas las relaciones de la parte a).
- 2) Dado el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$ , define tres relaciones diferentes en  $A$  y representa cada una de ellas mediante diagrama de flecha, en un diagrama cartesianos y en forma tabular.
- 3) Investiga qué propiedades cumplen cada una de las siguientes relaciones:
- a) La relación de paralelismo en el conjunto de las rectas del plano.  
b) La relación "es menor que" en el conjunto de los números naturales ( $\mathbb{N}$ ).  
c) La relación "está incluido en" entre conjuntos.
- 4) Investiga qué propiedades cumple cada una de las siguientes relaciones, y en caso de ser posible clasifícalas:
- a) La relación "es hermano de" (consideraremos, para esta actividad, como hermanos a los que son hijos de misma madre y padre) definida en el conjunto de todos los seres humanos.  
b) La relación "es divisor de" definida en el conjunto  $A = \{2, 3, 6, 8, 12\}$ .  
c) La relación "es amigo de" definida en el conjunto de todos los seres humanos.  
d) La relación "es menor o igual que" definida en el conjunto  $A$  de la parte b).
- 5) Dado  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , se consideran las siguientes relaciones definidas en  $A$ :
- $$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,1), (2,3), (3,3), (3,1), (3,2), (4,4)\}$$
- $$R_2 = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (3,2), (4,4)\}$$
- a) Representa cada una en un sistema de ejes cartesianos.  
b) Indica en cada caso si la relación representada corresponde o no a una relación de equivalencia. Justifica.
- 6) Se consideran el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$  y la relación "... divide a..." definida en  $A$ . Realiza un diagrama sagital de la relación e investiga si es de orden.
- 7) Se considera la relación  $R$  definida en  $B = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 3\}$ , tal que su representación gráfica es la región pintada. Investiga si es una relación de equivalencia.



- 8) Investiga si la relación  $\mathcal{R}$  definida en  $\mathbb{Z}$  tal que  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$  es de equivalencia.
- 9) Sean  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{b, c\}$
- Se considera la relación  $\mathcal{R}$  definida en  $\mathcal{P}(A)$  tal que:  $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B$ .  
Prueba que  $\mathcal{R}$  es de equivalencia.
  - ¿Cuál es la clase de  $\{a, b, d\}$ ?
  - ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente  $\mathcal{P}(A)/\mathcal{R}$ ?
- 10) Se considera el conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$  y en él se definen las relaciones:
- $$\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\};$$
- $$\mathcal{R}_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}; \mathcal{R}_3 = A \times A;$$
- $$\mathcal{R}_4 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, c), (d, d)\};$$
- $$\mathcal{R}_5 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (a, b), (b, a), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}$$
- Investiga si las relaciones anteriores son de equivalencia. Justifica.
  - En cada caso, si la relación es de equivalencia, escribe las clases de equivalencia. Justifica.
- 11) En el conjunto de puntos de un plano se define la relación:  
 $P \mathcal{R} P' \Leftrightarrow d(P, O) = d(P', O)$ , siendo  $O$  un punto determinado del plano.
- Prueba que  $\mathcal{R}$  es de equivalencia.
  - Halla la clase de  $T$ , siendo  $T$  un punto del plano y determina el conjunto cociente.
- 12) Se define en el conjunto de los números reales la siguiente relación:  
 $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y = x^3 - y^3$
- Prueba que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.
  - Halla las clases de los reales 1, 2 y 3.
  - Halla los  $a \in \mathbb{R} / \mathcal{C}_a$  tenga tres elementos.

13) Se define en  $\mathbb{R}^*$  la siguiente relación:  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xy > 0$ .

a) Prueba que  $\mathcal{R}$  es de equivalencia.

b) Halla  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_{-1}$  y  $\mathcal{C}_a$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

c) Escribe el conjunto cociente

14) Se define en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  la relación  $(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow x - x' = 2(y - y')$

a) Prueba que  $\mathcal{R}$  es de equivalencia

b) Halla las clases de  $(0, 0)$  y de  $(2, -1)$ .

15) Sea  $A$  un conjunto y  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  dos relaciones de equivalencia en  $A$ .

Prueba que  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$  es una relación de equivalencia en  $A$ .

16) Sea  $\mathcal{R}$  definida en  $A$ , con  $A \neq \emptyset$  tal que  $\mathcal{R}$  es idéntica y transitiva; y sea  $\mathcal{S}$  definida en  $A$  tal que  $a \mathcal{S} b \Leftrightarrow a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$ . ¿Es  $\mathcal{S}$  una relación de equivalencia?