Practico Nº 3 (Profundización) – Relaciones

Notas:

- Leer el capítulo Nº 7: Relaciones del libro "Matemática Discreta y sus aplicaciones" Kenneth H. Rosen 5 edición, Mc Graw Hill, en español.

- Leer capítulo Nº 5: Relaciones y Funciones del libro:"Matemática Discreta y Combinatoria" Ralph. P. Grimaldi Editorial Pearson Prentice Hall 3a edición.

1. Consideremos la relación R sobre el conjunto de los enteros donde definimos $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow a.b \geq 0$. Investigar que propiedades cumple esta relación e indicar si es una relación de equivalencia, de orden parcial o de orden total. Justifique.

2. Consideremos la relación R sobre el conjunto de los enteros donde definimos: $a \mathrel{R} b \Leftrightarrow |a - b| < 1$. Investigar que propiedades cumple esta relación e indicar si es una relación de equivalencia, de orden parcial o de orden total. Justifique.

3. Sean R y S dos relaciones transitivas en un conjunto A. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando:
   a) $R \cup S$ es transitiva.
   b) $R \cap S$ es transitiva.

4. Dada la relación M por su matriz asociada, indicar que propiedades cumple e indicar si es una relación de equivalencia, de orden parcial o de orden total. Justifique. Dibujar el grafo correspondiente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Dadas las siguientes relaciones, indicar cuales son relaciones de equivalencia. Justificar.
   a) En el conjunto de los números naturales, $a \mathrel{R_1} b \Leftrightarrow a.b = a + b$
      Expresar [5], si existe.
   b) En el conjunto de los puntos del plano cuyas coordenadas sean números enteros, se define la relación: $(x_1,y_1) \mathrel{R_2} (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$
      Expresar [(5,6)], si existe. Interpretar gráficamente, si corresponde.

6. En el conjunto N×N se define la relación R con (a, b) R (c, d) si y sólo si a . b = c . d
   a) Investigar las propiedades de R, cuáles tiene y cuáles no.
   b) Indicar si R es una relación de equivalencia, de orden parcial y/o de orden total.
   c) Si R es una relación de equivalencia, indicar la clase del [(2,0)] y la del [(3,5)].
   d) Indicar si R es una función. En caso afirmativo, clasificarla.

7. En el conjunto A, de los números naturales menores o iguales que 20, se define la relación R como a R b si y sólo si a + b = 20
   a) Investigar las propiedades de R; cuáles tiene y cuáles no.
   b) Indicar si R es una relación de equivalencia, de orden parcial y/o de orden total.
   c) Si R es una relación de equivalencia, indicar la clase del [2] y del [5].
   d) Indicar si R es una función. En caso afirmativo, clasificarla.

8. Sea el conjunto A= Q - {0,1}.
   Se define en A la relación R tal que $x \mathrel{R} y \Leftrightarrow x.y.(x-1)(y-1)>0$
   a) Probar que R es una relación de equivalencia.
   b) Expresar cada clase de equivalencia.
   c) ¿Cuál es el conjunto cociente?

9. Sea R ⊆ NxN, tal que (x, y) ∈ R ⇔ $\sqrt{3x - y} < 4$
   Investigar si R verifica las siguientes propiedades: Reflexiva, simétrica, irreflexiva, antisimétrica, asimétrica, transitiva. Justificar en todos los casos las respuestas.

10. Sea R ⊆ ZxZ, tal que x R y ⇔ |x – 2y +1| = |y – 2x + 1|
    a) Probar que R es de equivalencia.
    b) Expresar las siguientes clases de equivalencia [0] , [5] y [8]
    c) Investigar si R es una función. En caso afirmativo, clasificarla.

11. Sea R⊆ NxN, tal que (x, y) R ⇔|x-y|= $\dot{8}$
    a) Dar 3 elementos de R, cuya segunda componente sea menor que 2.
    b) Probar que R es de equivalencia.
    c) Expresar las siguientes clases de equivalencia [0] , [5] y [8]
    d) Dar por extensión una relación M ⊆ R, M ⊆ DxD para algún conjunto D, tal que M sea simétrica y asimétrica. Indicar cuál es el conjunto D.

12. Sean x e y números enteros que verifican la relación R definida por |x – 3y|≤ 2
    a) Investigar si que R es una relación de equivalencia.
    b) En caso afirmativo, hallar [5], [0], [7] y el conjunto cociente de R.

13. Sean R y S relaciones definidas para un conjunto A. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas dando una prueba para las mismas.
    Esto es: si son verdaderas, demostrarlo; si son falsas, dar un contraejemplo.
    a) Si R y S son transitivas, entonces R ∪ S es transitiva.
    b) Si R o S no son transitivas, entonces R ∪ S no es transitiva.
    c) Si R y S son antisimétricas, entonces R ∪ S es antisimétrica.
    d) Si R es simétrica y transitiva entonces R es reflexiva.

14. Sea B = {a, b, c, d, e, f, g}
    a) Dar una relación de BxB asimétrica y cuyo cardinal sea 5.
    b) Dar una relación S de BxB, tal que |S| = 7, S es antisimétrica, irreflexiva y transitiva
    c) Dar una relación simétrica P, tal que S∩P =∅.
    d) Dada la partición Π de B, Π = {{d, a}, {g}, {e, b, f}, {c}}, dar por extensión una relación R ⊆ BxB, tal que el conjunto de clases de equivalencia determinado por R sobre B sea Π.

15. Sea R = { (x, y) ∈ ZxZ, x + (y - 3) = $\dot{3}$}
    a) Dé 3 elementos de R, tales que la primer componente x, sea mayor que 0 y la segunda menor que 0.
    b) Indicar si R verifica las siguientes propiedades, justificando en cada caso:
       - Simétrica
       - Transitiva
       - Reflexiva
       - Asimétrica
       - Antisimétrica
       - Irreflexiva
    c) ¿Es R una relación de equivalencia? Justifique.