Practico Nº 3 – Relaciones

Notas:

- Leer el capítulo Nº 7: Relaciones del libro "Matemática Discreta y sus aplicaciones" Kenneth H. Rosen 5 edición, Mc Graw Hill, en español.

- Leer capítulo Nº 5: Relaciones y Funciones del libro:"Matemática Discreta y Combinatoria" Ralph. P. Grimaldi Editorial Pearson Prentice Hall 3a edición.

1. Dados A ={2,3, 4} y B={4,5}, determinar: AxB, BxA, BxB, BxBxB

2. Del conjunto AxA se conocen los elementos (c,d) y (a,b). Además se sabe que |AxA|=16. Hallar AxA.

3. Un alumno dice haber hallado el siguiente producto cartesiano:
   AxB={(a,1),(a,2),(b,1),(c,1),(c,2)}, ¿tiene razón?. Fundamenta tu respuesta.

4. Halla todos los subconjuntos de AxB (es decir, su conjunto de partes P(AxB)), siendo A={0,1} y B={2}.

5. Dados A ={2,3,4} y B={4,5}, indicar si los siguientes conjuntos son relaciones o no de A en B:
   {}, {(2,4)}, {(2,4),(2,5)}, {(2,4), (3,4), (4,4)}, {(2,4),(3,4),(4,5)}, AxB

6. Dados A={1,2,3,4}, B={2,5), C={3,4,7}.
   Determinar: AxB, BxA, $A \cup (B\times C)$, $(A \cup B)\times C$, $(A\times C)\cup(B\times C)$.

7. Dados A={1,2,3} y B={2,4,5}, de ejemplos de tres relaciones no vacías de A en B, y de tres relaciones no vacías binarias en A.

8. Sea $\Re \subset N\times N$ donde $(m,n) \in \Re$ si y sólo si n=5m+2
   a) Señalar una definición recursiva para $\Re$.
   b) Utilizar la parte anterior para mostrar que $(4,22)\in\Re$

9. Dado A={1,2,3), señalar si las relaciones dadas a continuación cumplen o no con las propiedad reflexiva y/o simétrica:
   $\Re_1$ ={(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)}, $\Re_2$ ={(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)},
   $\Re_3$={(1,1),(2,2),(3,3)}, $\Re_4$ ={(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)}, $\Re_5$ ={(1,1),(2,3),(3,3)}

10. Dado A={1,2,3,4}, dar un ejemplo de una relación $\Re$ sobre A, que sea:
    a) reflexiva y simétrica, pero no transitiva.
    b) reflexiva y transitiva, pero no simétrica.
    c) Simétrica y transitiva, pero no reflexiva.

11. Para cada una de las siguientes relaciones, determine si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.
    a) $\Re \subseteq Z^*\times Z^*$, donde a$\Re$b, si a es divisor de b.
    b) Para un universo U y un subconjunto fijo C de U, se define $\Re$ sobre P(U) como sigue:
       Para cualquier $A,B \subseteq U$, A$\Re$B si $A\cap C=B\cap C$.
    c) En el conjunto A de todas las rectas del plano α, se define $\Re$ para dos rectas r y s de α como r$\Re$s si r es perpendicular a s.
    Obs: Estudiar el caso propuesto en la parte c) pero en el espacio.
    d) $\Re$ es la relación sobre Z tal que x$\Re$y si x+y es un número par (impar).
    e) $\Re$ es la relación sobre Z tal que x$\Re$y si x- y es un número par (impar).
    f) $\Re$ es la relación sobre Z^* tal que x$\Re$y si x e y son primos entre sí.
    g) Sea T el conjunto de todos los triángulos del plano α. $\Re$ es la relación sobre T tal que x$\Re$y, si x e y tienen un ángulo de igual medida.
    h) $\Re$ es la relación de ZxZ tal que (x,y)$\Re$(z,w) si $x \leq z$.

12. Indicar de la relaciones del ejercicio anterior, ¿Cuáles son relaciones de orden parcial y cuales son de equivalencia?

13. Sea A={1;2;3;4}, y sea R={(1;1),(1;2),(2;1),(2;2),(3;4),(4;3),(3;3),(4;4)}, determinar las clases de equivalencia.

14. Sean $A=\{1,2,4,6,8\}$ y R definida en A tal que $xRy \Leftrightarrow x+y=\dot{3}$.
    a) Determinar R por extensión.
    b) Representarla por medio de un diagrama.
    c) Investigar que propiedades cumple.

15. Dado $P=\{a,b,c,d\}$, en el se define la relación R tal que:
    $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(b,c),(c,b)\}$
    a) Investigar si R es de equivalencia.
    b) En caso afirmativo, hallar las clases de equivalencia de los elementos de P.

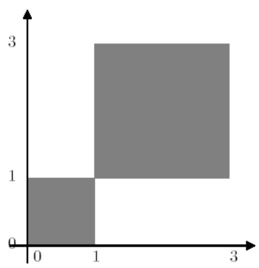
16. Indicar si cada uno de los conjuntos de subconjuntos es una partición. Justificar.
    a) A={1;2;3;4;5;6;7;8}, A_1 ={4;5;6}, A_2 ={1;8}, A_3 ={2;3;7}
    b) A={a,b,c,d,e,f,g,h}, A_1 ={d,e}, A_2 ={a,c,d}, A_3 ={f,h}, A_4 ={b,g}
    c) A={1;2;3;4;5;6;7;8}, A_1 ={1;3;4;7}, A_2 ={2;6}, A_3 ={5;8}

17. Sea A={1;2;3;4;5;6}, R={(1;1), (1;2), (2;1), (2;2), (3;3), (4;4),(4;5), (5;4), (5;5), (6;6)}, determinar: a) [1], [2] y [3], b) la partición que induce R sobre A.

18. Sea R definida en Z^+xZ^+, (a,b) R (c,d) ⇔ a+d=b+c, se pide:
    a) Investigar si R es una relación de equivalencia.
    b) Escribir las clases de equivalencia y el conjunto cociente en el caso que la relación R se defina sobre el conjunto A={1,2,3,4,5}
    c) Hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente de la relación R definida en Z^+xZ^+

19. Dado $A=\{1,2,3,4\}$, se consideran las siguientes relaciones definidas en A:
    $R_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,1),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2),(4,4)\}$
    $R_2=\{(1,1),(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2),(4,4)\}$
    a) Representar cada una en un sistema de ejes cartesianos.
    b) Indicar en cada caso si la relación representada corresponde o no a una relación de equivalencia.

20. Se considera la relación R definida en $B=\{x\in\mathbb{R}/0\le x\le 3\}$ tal que su representación gráfica es la región pintada. Investigar si es una relación de equivalencia.



21. Investigar si la relación R definida en $\mathbb{Z}$: $xRy \Leftrightarrow x^2+x=y^2+y$ es de equivalencia.

22. Se define en el conjunto de los números reales la siguiente relación: $xRy \Leftrightarrow x-y=x^3-y^3$.
    a) Probar que R es una relación de equivalencia.
    b) Hallar las clases de los reales 1,2 y 3.

23. Se define en $\mathbb{R}^*$ la siguiente relación: $aRb \Leftrightarrow a \times b > 0$.
    a) Probar que R es de equivalencia.
    b) Hallar las clases de equivalencia de los reales 1 y -1.

24. Sea R una relación definida en $\mathbb{R}$ tal que $xRy \Leftrightarrow |x-2| = |y-2|$
    a) Demostrar que R es de equivalencia
    b) Hallar la clase de equivalencia de 1.

Ejercicios Complementarios

25. Se define en RxR la relación (x,y) R (x',y') $\Leftrightarrow$ x-x'=2(y-y')
    a) Probar que R es de equivalencia
    b) Hallar las clases de (0, 0) y de (2,-1)

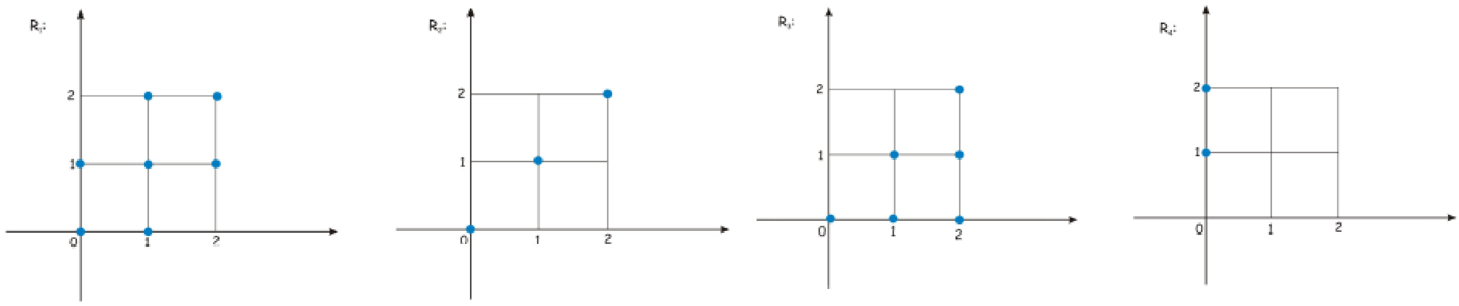
26. Sea A un conjunto y R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en A. Probar que $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia en A.

27. Sea R definida en A con A $\neq \varnothing$. tal que R es idéntica y transitiva; y sea S definida en A tal que aSb $\Leftrightarrow$ (aRb $\wedge$ bRa). Demostrar que S es de equivalencia.

28. Si en el conjunto de las rectas del plano definimos la relación R de la siguiente manera: s R r $\Leftrightarrow$ s // r, siendo r y s dos rectas:
    a) Prueba que R es de equivalencia.
    b) Describe sus clases de equivalencias.

29. Sea T : RxR / (a,b) T (c,d) $\Leftrightarrow$ b – d = a^2 – c^2
    a) Demuestra que T es una relación de equivalencia.
    b) Halla la clase de (0, 0)

30. Sean R_1, R_2, R_3 y R_4, relaciones definidas en el conjunto A = {0, 1, 2}, cuyas representaciones en sistemas de ejes cartesianos son las siguientes:



    Investiga si las relaciones anteriores son de equivalencia o de orden. Si alguna relación es de equivalencia, determina el conjunto cociente y si es de orden, indica si es total o parcial y halla.

31. a) Demuestra que la relación R definida en Z, tal que: x R y $\Leftrightarrow$ x^2 - y^2 = 2x - 2y es de equivalencia.
    b) Investiga si -1 $\in$ C_3.

32. Determina si las siguientes relaciones son o no relaciones de orden. En caso afirmativo, indica si son de orden total o parcial:
    i) la relación de inclusión entre conjuntos.
    ii) la relación $\leq$ entre números reales.
    iii) la relación a | b (a divide a b o b es divisor de a) en el conjunto de los naturales.

33. Dada la relación R$\subseteq$ N^2 tal que: m R n $\Leftrightarrow \exists$ k $\in$ N / m^2 = kn.

i) ¿R es de equivalencia? En caso afirmativo halla el conjunto cociente.
ii) Halla A= {n $\in$ N / 4 R n} y B = {m $\in$ N / m R 4}.

34. Dado $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se definen las siguientes relaciones:

$S \subset A^2 \,/\, (x,y) \in S \Leftrightarrow \frac{3(x-y)}{x+y} \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $T \subset A^2 \,/\, (x,y) \in T \Leftrightarrow \frac{7(x-y)}{x+y} \in \mathbb{Z}$

Representa S y T y averigua si son relaciones de equivalencia, en caso afirmativo halla el conjunto cociente.

Para profundizar un poco más

35. Puedes realizar todos los ejercicios propuestos en los libros:
    - "Matemática Discreta y sus aplicaciones" Kenneth H. Rosen 5 edición, Mc Graw Hill, en español. Capítulo Nº 7: Relaciones. Páginas 439 - 495
    - "Matemática Discreta y Combinatoria" Ralph. P. Grimaldi Editorial Pearson Prentice Hall 3a edición. Capítulo Nº 5: Relaciones y Funciones. Páginas 245 - 308