

Práctico 1

Ejercicio 1

Definir los siguientes conjuntos por comprensión y también por extensión cuando sea posible:

- Números naturales pares y múltiplos de 5.
- Números naturales pares, múltiplos de 5 y menores que 75.
- Números naturales primos y menores que 50.
- Letras vocales del alfabeto castellano.
- Parejas de números naturales tales que la primer componente es menor que la segunda.
- Parejas de letras vocales tales que la primer componente es alfabéticamente mayor que la segunda.
- Parejas de números naturales tales que la suma de sus componentes es menor que 5.
- La relación de Identidad entre números naturales (IdN).
- La relación de Identidad entre letras vocales.
- El conjunto potencia de $\{0, 1, 2\}$.

Ejercicio 2

Dados los siguientes conjuntos:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de } 3 \text{ y } x < 20 \}$$

$$B = \{ a, b, c, d \}$$

$$C = \{ x \in \text{char} \mid x < g \}$$

$$D = \{ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \}$$

a) Calcular los siguientes conjuntos, expresando el resultado por extensión:

- $A \cup D$
- $C - B$
- $B \oplus C$
- $(C \cap A) \cup B$
- $A \times B$
- $\emptyset \times A$
- $(A - D) \times (B \cap C)$
- $A \times B \times (C - B)$
- $P(B \cap C)$
- $P((C - B) \times (B \cap C))$
- $B \times P(B)$
- $P(A \cap D) \times P(B \cap C)$

b) Calcular los siguientes cardinales:

- $| C \times D |$
- $| A \times B \times C |$
- $| P(B \times C \times D) |$
- $| P(B \times C) \times P(A \cup B \cup C) |$

c) Proponer dos particiones distintas de cada uno de los conjuntos A, B, C, D.

Ejercicio 3

Dados los siguientes conjuntos:

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de } 4 \text{ y } x < 50 \}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es potencia de } 2 \}$$

- Expresar por extensión la relación $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $R = (A \cap B) \times (A \cap B)$
- Indique si R cumple o no cada una de las siguientes propiedades, escribiendo una prueba que justifique su respuesta. Para cada caso estudie si se verifica: Reflexiva, Irreflexiva, Simétrica, Asimétrica, Antisimétrica, Transitiva.
- ¿Es R una relación de equivalencia? ¿Es R una relación de orden parcial amplio? Justifique.

Ejercicio 4

Dadas las siguientes relaciones:

$$R = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \geq 0 \}$$

$$S = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ es par y } x = y \}$$

- ¿Son relaciones de equivalencia? Justifique.
- En caso de ser posible, calcular las siguientes clases de equivalencia: $[0]_R$ y $[0]_S$.

Ejercicio 5

Sean A un conjunto cualquiera y $R \subseteq A \times A$ y $S \subseteq A \times A$.

- Demuestre que si R es reflexiva y $|A| = |R|$ entonces R es una relación de equivalencia.
- Demuestre que si R y S son relaciones reflexivas y simétricas, entonces $(R \cap S)$ también es una relación reflexiva y simétrica.
- Demuestre que si R y S son tales que $R \cap S = \text{Id}_A$ entonces $(R \oplus S)$ no es una relación de equivalencia.

Ejercicio 6

Sea $A = \{!, ?, \#\}$ y la relación $R \subseteq (P(A \times A))^2$, tal que $(a, b) \in R$ si y solo si $a \cap b = \emptyset$.

- Dar dos elementos de R
- Determinar si R es una relación de equivalencia, probar el resultado.
- Si es de equivalencia, dar la clase de equivalencia de $\{(!, \#)\}$

Ejercicio 7

Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles no, probar el resultado.

- Si una relación no es antisimétrica entonces es simétrica.
- Si una relación es asimétrica entonces no es antisimétrica.
- Si una relación es reflexiva entonces es antisimétrica.

Ejercicio 8

Dadas las siguientes funciones:

$$f_1: A \rightarrow A \text{ siendo } A = \{a, b, c, d\}, \text{ tal que: } f_1(a) = b, f_1(b) = c, f_1(c) = d, f_1(d) = c.$$

$$f_2: A \rightarrow B \text{ siendo } B = \{0, 2, 4\}, \text{ tal que: } f_2 = \{ (a, 0), (b, 0), (c, 2) \}$$

$$f_3: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ tal que: } f_3(x) = 2x + 4.$$

$$f_4: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ tal que: } f_4(x) = x^2.$$

$$f_5: P(C) \rightarrow \mathbb{N}, \text{ siendo } C = \{1, 2, 3\} \text{ tal que } f_5(x) = \text{cardinal}(x).$$

$$f_6: P(C) \times P(C) \rightarrow P(C) \text{ tal que } f_6(x,y) = x \cup y.$$

- Expresarlas en forma de conjunto definido por extensión cuando sea posible. Determinar si son totales, parciales, inyectivas, sobreyectivas, biyectivas. Justifique todas sus respuestas.
- Para cada una de ellas, determinar dominio, codominio, preimagen e imagen.
- Para las que la función inversa esté definida, calcularla.
- Calcular: $(f_2 \circ f_1)$, $(f_4 \circ f_3)$, $(f_3 \circ f_4)$, $(f_5 \circ f_6)$. Expresar la función compuesta en forma de conjunto definido por extensión para aquellos casos en los que sea posible.

Ejercicio 9

Sean f y g dos funciones cualesquiera. Indicar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

Demostrando su respuesta. En caso de ser falsa analizar para qué condiciones particulares de f y g la afirmación es cierta.

- $f \cup g$ es una función
- $f \cap g$ es una función
- $f - g$ es una función

Ejercicio 10

Sean A y B dos conjuntos no vacíos cualesquiera, y la siguiente función $f: A \rightarrow B$ total e inyectiva.

- Demuestre que si $\text{imagen}(f) \subset \text{codominio}(f)$ entonces se cumple que $|A| < |B|$.
- Sean las relaciones: $R \in A^2$ y $S \in B^2$ tales que $(x,y) \in R \leftrightarrow (f(x), f(y)) \in S$. Demuestre que si S es una relación de equivalencia, entonces R es una relación de equivalencia.

Ejercicio 11

Dado el conjunto $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, definir por extensión tres conjuntos llamados A, B y C, que satisfagan las siguientes condiciones:

1. $(A \cup B \cup C)^c = \{e\}$
2. $B - C = \{b, c, g\}$
3. $A \oplus B = \{a, c, g\}$
4. $(a, d) \in A \times C$
5. $\{d\} \in P(A)$
6. $f \notin B$

Ejercicio 12

Dados los siguientes conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 3, 5\}$

Sea $h: A \rightarrow B$, definida como sigue: $h(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \in A \cap B \\ 4 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Definir una función $g: B \rightarrow B$, tal que: g es parcial y $g \circ h$ no es vacía.

1. ¿Está definida la función $g \circ g$? Dar una prueba para la respuesta.
2. Definir $R \subseteq A \times B$, tal que:
 - i. R no es función
 - ii. Está definida R^{-1}
 - iii. $|R| \geq 2$
3. Definir una relación $P \subseteq A^2$, tal que:
 - i. P es reflexiva
 - ii. $P \neq \text{Id}_A$
 - iii. $ts(P) \neq P$
 - iv. $ts(P) = st(P)$