Practico Nº 4 – Funciones (Profundización)

1. Dados $A=\{3,4,5,6\}$ y $B=\left\{2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,6\right\}$, sea $f:A\to B \mid f(x)=\frac{x+1}{2}$.
   a) Hallar el correspondiente de 3, o sea $f(3)$.
   b) Hallar $x / f(x)=3$.
   c) Hallar $x / f(x)=6$.
   d) Representar f en el siguiente diagrama

2. Sea la relación $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \ / \ f(x)=x^3-x$
   Indicar si es una función y en caso afirmativo, clasificarla. Justifique.

3. Sea una función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \ / \ \exists f^{-1}$, demostrar que f es sobreyectiva.

4. Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} / f(x)=\begin{cases} -x^2+3x-2 & \text{si } x\le 3 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } x>3 \end{cases}$
   a) Justificar que f es una función.
   b) Clasificarla.
   c) Investigar si existe $f \circ f$, en caso afirmativo hallarla.

5. Sean $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 / f((x,y))=\left(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y\right),\ g((x,y))=(0,y)$.
   a) Justificar que f y g son funciones.
   b) Representar, para cada una, un par de puntos correspondientes, y dar una interpretación geométrica.
   c) Decir si son inyectivas y/o sobreyectivas. Justificar.
   d) Decir si existe g º f y/o f º g. En caso afirmativo, hallarlas.

6. Dado el conjunto $P=\left\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 / 5a-b=\dot{10}\right\}$ y $f:P^2\to P / f((a,b),(c,d))=(a+c,b+d)$
   a) Investigar si f es una función
   b) En caso afirmativo decir si es inyectiva
   c) En caso afirmativo decir si es sobreyectiva

7. Se considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} / f(x)=x^2-x$ y la relación $S:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $a\ S\ b \Leftrightarrow f(a).f(b)>0$.
   a) Determina el conjunto H / $H=\{x\in\mathbb{R} / x \not S\ x\}$
   b) Demuestra que la relación $T:(\mathbb{R}-H)\to(\mathbb{R}-H) / a\ T\ b \Leftrightarrow f(a).f(b)>0$ es de equivalencia.
   c) Halla el conjunto cociente $\dfrac{(\mathbb{R}-H)}{T}$ que la relación T determina sobre $\mathbb{R}-H$.

8. Dada la siguiente función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=\begin{cases}|x| \text{ si } -1\le x\le 1\\ x^2 \text{ si } x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$
   a) Investigar si f es una función inyectiva y/o sobreyectiva.
   b) Decir si existe $f\circ f$, en caso afirmativo hallarla.

9. Se define la relación $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,\forall x,y\in\mathbb{R}: x\ T\ y \Leftrightarrow x^2-y^2=4x-4y$.
   a) Probar que T es una relación de equivalencia.
   b) Hallar [1], [$\sqrt{2}$], [a] con $a\in\mathbb{R}$, discutiendo el cardinal de [a] en función de a.

10. Sea $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\,/\,f(x)=\begin{cases}-x-3 \text{ si } x\le -1\\ 2x+1 \text{ si } x>-1\end{cases}$.
   a) Investigar si f es función. En caso afirmativo, investigar si es inyectiva y si es sobreyectiva. Justificar.
   b) Dada ahora $h:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}\,/\,h(x)=\dfrac{x}{2}$, siendo $\mathbb{Z}_2$ el conjunto de los enteros pares, investigar si $(h\circ f)$ y $(f\circ h)$ son funciones. Justificar.

11. Dada la siguiente relación $R:\mathbb{Q}^*\to\mathbb{Q}^*\,/\,x\ T\ y\Leftrightarrow(x=y \text{ o } x.y=4)$.
   a) Demostrar que R es una relación de equivalencia.
   b) Hallar [1/2] y [-3].
   c) Investigar la existencia de clases unitarias.

12. Demostrar que:

$$f:A\to B \text{ es una función biyectiva} \Leftrightarrow f^{-1}:B\to A \text{ es una función y es biyectiva.}$$

Ejercicios Complementarios:

1) Representar y clasificar las siguientes funciones

   a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{si } x>0\\ x^2+1 & \text{si } x\le 0\end{cases}$

   b) $f:\mathbb{R}\to[1,+\infty),\quad f(x)=x^2+1$

   c) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q},\quad f(x)=\dfrac{x-1}{2}$

2) Dada $f:\mathbb{R}\to(-1,1),\quad f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, demostrar que existe la función inversa y hallar $f^{-1}(x)$.

3) Las funciones $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ y $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ son tales que $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+1$ y $g(x)=1-x$. Estudiar si existen las funciones $g\circ f$ y $f\circ g$. En caso afirmativo hallar las respectivas expresiones.

4) Sean $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{2,3\}$. Representar y clasificar $f:A\times B\to\mathbb{Z}$ definida por $f((a,b))=3a-b$

5) Se considera $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2} & \text{si } x\ge 3\\ x^2-1 & \text{si } x<3\end{cases}$

   i) ¿f es función? Justificar la respuesta.
   ii) ¿f es inyectiva? Justificar la respuesta.
   iii) ¿f es sobreyectiva? Justificar la respuesta.
   iv) Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=2x+1$. ¿Existen $h\circ f$ y $f\circ h$? En caso de existir, determinarlas. Justificar la respuesta.

6) Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \,/\, f((x,y))=(-x,y)$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \,/\, g((x,y))=(-y,x)$.

   a) Investigar si son funciones biyectivas.
   b) Interpretar geométricamente.
   c) Investigar si existe $g\circ f$ y en caso afirmativo hallar una fórmula e interpretar geométricamente.

7) Sea $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\quad f(x)=\begin{cases}-x-3 & \text{si } x\le -4\\ x+5 & \text{si } x>-4\end{cases}$

   Investigar si f es una función, y en caso afirmativo si es inyectiva o sobreyectiva.