1) Estudio analítico y representación gráfica de $f : f(x) = x - 3 + \ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right|$

1) $f(x) = x - 3 + L\left|\frac{x-2}{x+4}\right|$ $\qquad D(f) = \mathbb{R} - \{2, -4\}$

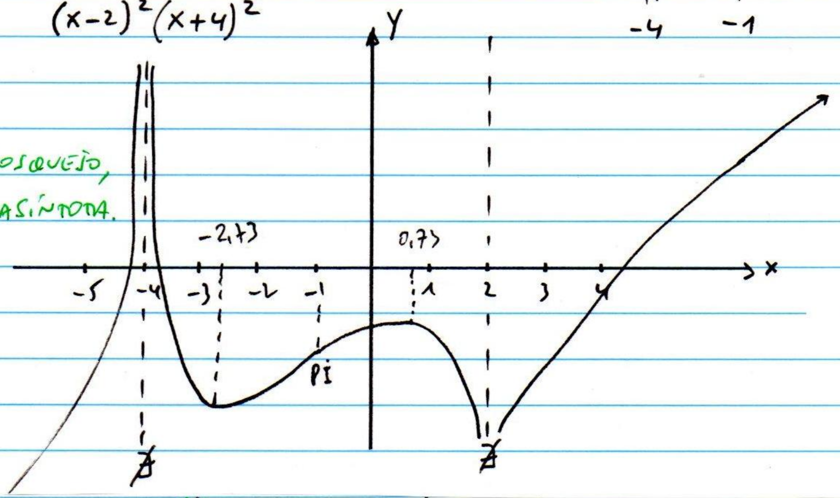
$f'(x) = 1 + \frac{6}{(x-2)(x+4)} = \frac{x^2+2x-2}{(x-2)(x+4)}$

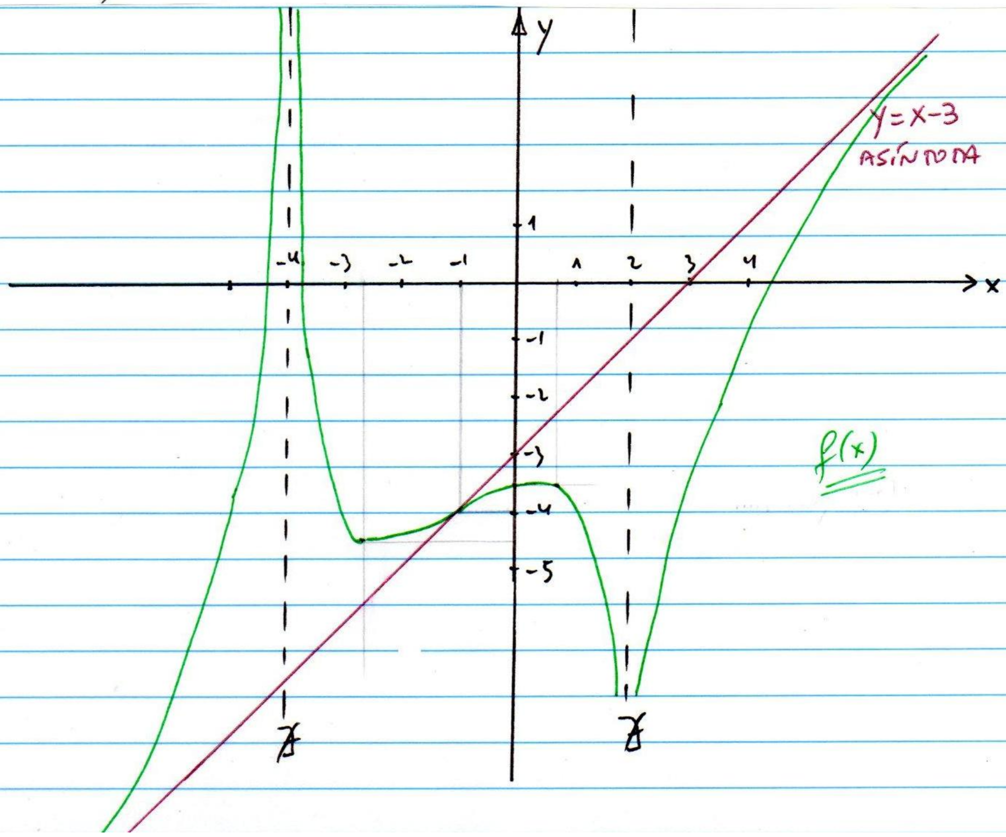
SIGNO $+ \;\nexists\; - \;0\; + \;0\; - \;\nexists\; +$ en $-4, \; -1-\sqrt{3}, \; -1+\sqrt{3}, \; 2$

$(-2{,}73) \quad (0{,}73)$

$f''(x) = \frac{-12(x+1)}{(x-2)^2(x+4)^2}$

SIGNO $+ \;\nexists\; + \;0\; - \;\nexists\; -$ en $-4, \; -1, \; 2$





2) Investigar si existen valores a y b reales para que g sea derivable en $\Re$. Justificar.

$$g : g(x) = \begin{cases} L|x-2| + x & x \geq 3 \\ ax + b & x < 3 \end{cases}$$

2) CONTINUIDAD

* $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} L|x-2| + x = L|3-2| + 3 = 3$

* $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} ax + b = 3a + b$

* $f(3) = L|3-2| + 3 = 3$

SI g FUERA DERIVABLE EN $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ g DEBERIA SER CONTINUA EN $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ g DEBERIA SER CONTINUA EN $x=3$

ENTONCES $3a + b = 3$

REPASO: $(x > 2)$
1) $|x-2| = x-2$ si $x \to 3$
2) $\boxed{L(x-2) \sim x-2-1}$ PORQUE $x-2 \to 1$

VEAMOS AHORA DE DERIVABILIDAD:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{L|x-2| + x - 3}{x-3} =$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{L(\overset{\to 1}{(x-2)})}{x-3} + \frac{x-3}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x-2-1}{x-3} + \frac{x-3}{x-3} = 2$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{ax + b - (3a+b)}{x-3} =$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{ax + b - 3a - b}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{a(x-3)}{x-3} = a$$

ENTONCES $a = 2$

Y COMO TENIAMOS DE ANTES QUE $3a + b = 3$

$3(2) + b = 3$

$b = -3$

REPASO:
$$\lim_{x \to 1} \frac{Lx}{x-1} = 1$$

DICHO DE OTRA FORMA
$$Lz \sim z - 1$$
$$z \to 1$$

3) a) Encontrar una función continua f, el número real λ y el valor de la $\int_0^1 f$ sabiendo que se cumple la igualdad indicada. $\int_0^x f = e^{(x^2-x)} + \lambda, \forall x \in \Re$

Resolución:

$$F(x) = \int_0^x f = e^{(x^2-x)} + \lambda, \forall x \in \Re$$

$$f \ \ es \ \ continua \ \Rightarrow (teo \ \ fund \ \ Cálculo) \ F'(x) = f(x)$$

$$F(x) = e^{(x^2-x)} + \lambda \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = F'(x) = e^{(x^2-x)}(2x-1)$$

Aplicamos la propiedad de la integral: $\int_0^0 f(x)dx = 0$ y obtenemos

$$e^{(0^2-0)} + \lambda = 0 \ \Rightarrow 1 + \lambda = 0 \ \Rightarrow \lambda = -1$$

Por último calculamos $\int_0^1 f(x)dx = e^{(1^2-1)} - 1 = 0$

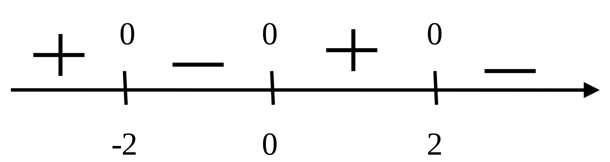
b) Calcula en el intervalo $[0 \ ; \ 3]$ el área limitada entre el eje OX y el gráfico de la función $f : f(x) = 2x.(4-x^2)$

Resolución:

Sabemos que el Área pedida es A= $\int_0^3 |f(x)|dx$

Y $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & si \ \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & si \ \ f(x) < 0 \end{cases}$

Estudiemos entonces el signo de la función $f : f(x) = 2x.(4-x^2)$. Las raíces son 0, -2 y 2.



Entonces $A = \int_0^3 |f(x)|dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 (-f(x))dx$

$$\int 2x.(4-x^2)dx = \int (8x-2x^3)dx = 8\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^4}{4} + cte$$

Queda a cargo del lector hacer las cuentas que faltan…

4) a) Calcular la derivada de $f : f(x) = L(2x-5)$ en el punto $x = 4$ usando la definición de derivada en un punto.

Resolución:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{L(2x-5)-L3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{L\left(\dfrac{2x-5}{3}\right)}{x-4}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\dfrac{2x-5}{3}-1}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{3(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{3(x-4)}=\frac{2}{3}$$

b) Calcular la derivada de $k(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{4x^2+5}$

Ejercicio del práctico: a cargo del lector.