

INTRO. MATRICES Y DETERMINANTES Prof. Gustavo Sosa

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Tienen también muchas aplicaciones en el campo de la física.

MATRICES

Una matriz es una tabla ordenada de escalares a_{ij} de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se denota también por (a_{ij}) , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, o simplemente por (a_{ij}) .

Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas. Una matriz con m filas y n columnas se denomina matriz m por n , o matriz $m \times n$.

Las matrices se denotarán usualmente por letras mayúsculas, A, B, \dots , y los elementos de las mismas por minúsculas, a, b, \dots

Ejemplo:

La siguiente matriz es una matriz 2×3 : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

donde sus filas son $(1, -3, 4)$ y $(0, 5, -2)$ y sus

columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

CLASES DE MATRICES

Según el aspecto de las matrices, éstas pueden clasificarse en:

Matrices cuadradas

Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. Se dice que una matriz cuadrada $n \times n$ es de orden n y se denomina *matriz n -cuadrada*.

Ejemplo: Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, A y B son matrices cuadradas de orden 3 y 2 respectivamente.

Matriz identidad

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz n -cuadrada. La diagonal (o diagonal principal) de A consiste en los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. La traza de A , escrito $\text{tr } A$, es la suma de los elementos diagonales.

La matriz n -cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otra posición, denotada por I , se conoce como matriz identidad (o unidad). Para cualquier matriz A ,

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Matrices triangulares

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es una matriz triangular superior o simplemente una matriz triangular, si todas las entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero. Así pues, las matrices

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

son matrices triangulares superiores de órdenes 2, 3 y 4.

Matrices diagonales

Una matriz cuadrada es diagonal, si todas sus entradas no diagonales son cero o nulas. Se denota por $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

son matrices diagonales que pueden representarse, respectivamente, por $\text{diag}(3,-1,7)$, $\text{diag}(4,-3)$ y $\text{diag}(2,6,0,-1)$.

Traspuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz A consiste en intercambiar las filas por las columnas y se denota por A^T .

Así, la traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ es } A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$, entonces $A^T = (a_{ji}^T)$ es la matriz $n \times m$. La trasposición de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(A^T)^T = A$.
3. $(kA)^T = kA^T$ (si k es un escalar).
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Matrices simétricas

Se dice que una matriz real es simétrica, si $A^T = A$; y que es antisimétrica, si $A^T = -A$.

Ejemplo:

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que los elementos simétricos de A son iguales, o que $A^T = A$. Siendo así, A es simétrica.

Para B los elementos simétricos son opuestos entre sí, de este modo B es antisimétrica. A simple vista, C no es cuadrada; en consecuencia, no es ni simétrica ni antisimétrica.

Matrices ortogonales

Se dice que una matriz real A es ortogonal, si $AA^T = A^T A = I$. Se observa que una matriz ortogonal A es necesariamente cuadrada e invertible, con inversa $A^{-1} = A^T$.

Consideremos una matriz 3×3 arbitraria:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Si A es ortogonal, entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Matrices normales

Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta, esto es, si $AA^T = A^T A$. Obviamente, si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{pmatrix}$$

Puesto que $AA^T = A^T A$, la matriz es normal.

OPERACIONES CON MATRICES

Suma y resta de matrices

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden 3×2 y otra de 3×3 , no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Ejemplo:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Para sumar o restar más de dos matrices se procede igual. No necesariamente para poder sumar o restar matrices, éstas tienen que ser cuadradas.

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A + B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Para poder multiplicar dos matrices, la primera debe tener el mismo número de columnas que filas la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.

Es decir, si tenemos una matriz 2×3 y la multiplicamos por otra de orden 3×5 , la matriz resultante será de orden 2×5 .

$$(2 \times 3) \times (3 \times 5) = (2 \times 5)$$

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda por la primera, no podríamos efectuar la operación.

3×5 por 2×3 ,

puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas la segunda.

Supongamos que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices tales que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B ; es decir, A es una matriz $m \times p$ y B una matriz $p \times n$. Entonces el producto AB es la matriz $m \times n$ cuya entrada ij se obtiene multiplicando la fila i de A por la columna j de B .

Esto es,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$

Ejemplo:

1.

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

• *Producto por un escalar*

El producto de un escalar k por la matriz A , escrito $k \cdot A$ o simplemente kA , es la matriz obtenida multiplicando cada entrada de A por k :

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

División de matrices

La división de matrices se define como el producto del numerador multiplicado por la matriz inversa del denominador. Es decir, sean las matrices A y B tal que $A/B = AB^{-1}$:

Si una matriz está dividida entre un escalar, todos los términos de la matriz quedarán divididos por ese escalar.

Ejemplo:

Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, y $k = 2$ un escalar. En este caso:

$$A/k = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 8/2 & 16/2 \\ 3/2 & -6/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3/2 & -3 \end{pmatrix}$$

MATRICES INVERTIBLES

Se dice que una matriz cuadrada A es invertible, si existe una matriz B con la propiedad de que

$$AB = BA = I$$

siendo I la matriz identidad. Denominamos a la matriz B la inversa de A y la denotamos por A^{-1} .

Ejemplo:

Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & -10 + 10 \\ 3 - 3 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & 15 - 15 \\ -2 + 2 & -5 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Puesto que $AB = BA = I$, A y B son invertibles, siendo cada una la inversa de la otra.

Método de Gauss

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n . Para calcular la matriz inversa de A , que denotaremos como A^{-1} , seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1. Construir la matriz $n \times 2n$ $M = (A : I)$ esto es, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha.

Paso 2. Se deja tal y como está la primera fila de M , y debajo del primer término de la diagonal principal, a_{11} , que llamaremos *pivote*, ponemos ceros. Luego se opera como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Consideremos una matriz 3×3 arbitraria

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Paso 1.

$$M = (A : I) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Paso 2.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} & : & a_{11} \cdot 0 - a_{21} \cdot 1 & a_{11} \cdot 1 - a_{21} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 - a_{21} \cdot 0 \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & : & a_{11} \cdot 1 - a_{31} \cdot 1 & a_{11} \cdot 0 - a_{31} \cdot 0 & a_{11} \cdot 1 - a_{31} \cdot 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es igual que el anterior, pero esta vez se coge como pivote el segundo término de la diagonal principal.

Al llegar al último término de la diagonal, se procede igual que antes, pero poniendo los ceros encima del nuevo pivote. Se observa que al coger como pivote el último término de la diagonal, la matriz A se transforma en una matriz triangular.

Una vez realizados todos los pasos, la mitad izquierda de la matriz M se convierte en una matriz diagonal. En este momento hay que proceder a transformar, si es que no lo está, la mitad izquierda en la matriz identidad, dividiendo si fuera necesario las filas de M por un escalar.

Ejemplo:

Supongamos que queremos encontrar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Primero construimos la matriz $M = (A \mid I)$,

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right), \text{ luego se coge como pivote } a_{22} = -1,$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 - (-2) & 0 - 1 & 1 - 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim$$

La mitad izquierda de M está en forma triangular, por consiguiente, A es invertible. Si hubiera quedado toda una fila con ceros en la mitad A de M , la operación habría terminado (A no es invertible).

A continuación, cogemos como pivote a_{33} , ponemos ceros encima de éste y seguimos operando hasta que nos quede una matriz diagonal.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Ya que la matriz colocada en la mitad izquierda es diagonal, no hay que operar más. Transformamos la matriz diagonal en una matriz identidad; para ello hay que dividir la segunda fila entre -1 :

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

La matriz que ha quedado en la mitad derecha de M es precisamente la matriz inversa de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar si el resultado es correcto, se procede a multiplicar AA^{-1} , teniendo que dar como resultado la matriz identidad I .

Comprobación:

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Ejercicio: operaciones con matrices

① Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué clase de matrices son?

b) Calcular:

$$-A - B + C.$$

$$A + B - C.$$

$$3A + C/2.$$

c) Calcular:

$$(A \cdot B) / C.$$

d) Calcular la inversa de A (A^{-1}) y comprobar el resultado.

Resolución:

a) Las tres matrices son cuadradas y de orden tres. A su vez, B es una matriz triangular, ya que todas las entradas debajo de la diagonal principal son ceros, y C es antisimétrica porque los elementos simétricos son opuestos entre sí.

b)

$$\begin{aligned} \bullet -A - B + C &= -\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2-3+2 & -4+1+0 & -1+2-1 \\ -1-0+0 & 2-5-1 & -3-6+2 \\ -5-0+1 & 0-0-2 & 1-9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & -7 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet A + B - C &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2+3-2 & 4-1-0 & 1-2+1 \\ 1+0-0 & 2+5+1 & 3+6-2 \\ 5-0-1 & 0+0+2 & -1+9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet 3A + C/2 &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}{2} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 15 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 & 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1 & 12+0 & 3-1/2 \\ 3+0 & -6-1/2 & 9+1 \\ 15+1/2 & 0-1 & -3+5/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 12 & 5/2 \\ 3 & -13/2 & 10 \\ 31/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c)

• Puesto que $(A \cdot B) / C = A \cdot B \cdot C^{-1}$, calcularemos primero la inversa de C y luego haremos el producto.

$$\begin{aligned} C^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 11 & : & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & : & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & : & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & : & -2 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & : & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \end{aligned}$$

- Dividimos la primera fila entre -6, la segunda entre 3 y la tercera entre -3 para que en la mitad izquierda quede la matriz identidad,

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -2/3 & -11/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1/3 & -4/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- Por lo tanto, la matriz inversa de C es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -11/3 & 4/3 \\ -1/3 & -4/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- A continuación, se calcula el producto de las matrices A y B,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 18 & 29 \\ 3 & -11 & 13 \\ 15 & -5 & -19 \end{pmatrix}$$

- Por último, calculamos $(A \cdot B) \cdot C^{-1}$.

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C^{-1} &= \begin{pmatrix} 6 & 18 & 29 \\ 3 & -11 & 13 \\ 15 & -5 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -11/3 & 4/3 \\ -1/3 & -4/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{3} - \frac{36}{3} - \frac{29}{3} & -\frac{12}{3} - \frac{198}{3} - \frac{116}{3} & \frac{6}{3} + \frac{72}{3} + \frac{58}{3} \\ \frac{3}{3} + \frac{22}{3} - \frac{13}{3} & -\frac{6}{3} + \frac{121}{3} - \frac{52}{3} & \frac{3}{3} - \frac{44}{3} + \frac{26}{3} \\ \frac{15}{3} + \frac{10}{3} + \frac{19}{3} & -\frac{30}{3} + \frac{55}{3} + \frac{76}{3} & \frac{15}{3} - \frac{20}{3} - \frac{38}{3} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 59/3 & 326/3 & 136/3 \\ 4 & 21 & -5 \\ 44/3 & 101/3 & -43/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Sacando factor común 1/3, el resultado puede escribirse como:

$$(A \cdot B) \cdot C^{-1} = 1/3 \cdot \begin{pmatrix} 59 & 326 & 136 \\ 12 & 63 & -15 \\ 44 & 101 & -43 \end{pmatrix}$$

d)

- Primero se construye la matriz $M = (A : I)$ y luego se va desarrollando por Gauss. Así pues:

$$M = (A : I) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & : & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -20 & -7 & : & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & : & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 156 & : & 20 & 40 & -16 \end{pmatrix}.$$

• Se simplifica un poco para que las operaciones no sean tan costosas, dividiendo la tercera fila entre cuatro. De este modo, se tiene

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & : & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 39 & : & 5 & 10 & -4 \end{pmatrix} \text{ y se continua calculando,}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 78 & 156 & 0 & : & 34 & -10 & 4 \\ 0 & -312 & 0 & : & -64 & 28 & 20 \\ 0 & 0 & 39 & : & 5 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Se vuelve a simplificar, dividiendo la primera fila entre dos y la segunda entre cuatro,

$$\begin{pmatrix} 39 & 78 & 0 & : & 17 & -5 & 2 \\ 0 & -78 & 0 & : & -16 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 39 & : & 5 & 10 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3042 & 0 & 0 & : & -78 & -156 & -546 \\ 0 & -78 & 0 & : & -16 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 39 & : & 5 & 10 & -4 \end{pmatrix}.$$

• Puesto que ya ha quedado una matriz diagonal en la mitad izquierda de M , se procede a transformar esta mitad izquierda en una matriz identidad, dividiendo la primera fila entre -3042, la segunda entre -78 y la tercera entre 39,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1/39 & 2/39 & 7/39 \\ 0 & 1 & 0 & : & 8/39 & -7/78 & -5/78 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5/39 & 10/39 & -4/39 \end{pmatrix}.$$

Así pues, la matriz que ha quedado en la mitad derecha es precisamente la matriz identidad, que sacando factor común $1/78$ se puede escribir como:

$$A^{-1} = 1/78 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 16 & -7 & -5 \\ 10 & 20 & -8 \end{pmatrix}.$$

• Para comprobar el resultado, la matriz inversa de A o A^{-1} , tiene que cumplir $AA^{-1} = I$.

Procedamos a la comprobación:

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 16 & -7 & -5 \\ 10 & 20 & -8 \end{pmatrix} 1/78 = \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot 16 + 10 & 2 \cdot 4 - 4 \cdot 7 + 20 & 2 \cdot 14 - 4 \cdot 5 - 8 \\ 2 \cdot 2 - 2 \cdot 16 + 3 \cdot 10 & 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 20 & 14 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 \\ 5 \cdot 2 + 0 - 10 & 5 \cdot 4 - 0 - 20 & 5 \cdot 14 - 0 + 8 \end{pmatrix} 1/78 = \\
&= \begin{pmatrix} 78 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 78 \end{pmatrix} 1/78 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.
\end{aligned}$$

MATR. Y SIST. DE ECUAC. LINEALES

La matriz ampliada M de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es la siguiente:

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Cada fila de M corresponde a una ecuación del sistema y cada columna a los coeficientes de una incógnita, excepto la última, que corresponde a las constantes del sistema.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse trabajando con su matriz ampliada, específicamente, reduciéndola a forma escalonada mediante el proceso de Gauss.

Método de Gauss

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se aplica el método de Gauss. Este proceso se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Sea el sistema,

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y - z = -4 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{array} \right\}$$

su matriz ampliada asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Ahora resolvemos por el método de Gauss sabiendo que la primera columna corresponde a los coeficientes de la x , la segunda a los de la y , la tercera a los de la z y la cuarta a los términos independientes:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 2 & 5 & -1 & : & -4 \\ 3 & -2 & -1 & : & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & -3 & : & -10 \\ 0 & -8 & -4 & : & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & -3 & : & -10 \\ 0 & 0 & -28 & : & -84 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 1 & -3 & : & -10 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & & \\ 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

De este modo, el sistema tiene la solución única

$$x = 2, y = -1, z = 3.$$

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales por matrices, aplicando el método de Gauss u otros, es una de las múltiples aplicaciones que tienen éstas.

Ejercicio: resolución de sistemas de ecuaciones lineales por matrices

① Hallar el valor de x, y, z, t en los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando matrices:

$$\begin{array}{l} a) \begin{cases} x + y - 2z + 4t = 5 \\ 2x + 2y - 3z + t = 3 \\ 3x + 3y - 4z - 2t = 1 \end{cases} \\ b) \begin{cases} x + y - 2z + 3t = 4 \\ 2x + 3y - 3z + t = 3 \\ 5x + 7y + 4z + t = 5 \end{cases} \end{array}$$

a) La matriz M asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z & t & & \\ 1 & 1 & -2 & 4 & : & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & : & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & : & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & & \\ 1 & 1 & -2 & 4 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & : & -14 \end{pmatrix}$$

La tercera fila se suprime, puesto que es múltiplo de la segunda y resultaría una fila nula. Así, el sistema queda formado por dos ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & & \\ 1 & 1 & -2 & 4 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & : & -14 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es compatible e indeterminado, esto es, tiene infinitas soluciones.

$$x = -9 - y + 10t \\ z = 7t - 7 \quad \text{ó} \quad (-9 - y + 10t, y, 7t - 7, t).$$

Dependiendo de qué valores se escojan para y y t , salen distintos resultados. Así, para $y = t = 0$ tendremos la solución del sistema $x = -9, y = 0, z = -7, t = 0$.

b) La matriz M asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & : & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & : & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & : & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & : & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & : & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & : & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z & t & \\ 1 & 1 & -2 & 3 & : & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & : & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & -5 \end{pmatrix}$$

No hay necesidad de continuar calculando nada más, puesto que la matriz escalonada ya nos indica que el sistema es incompatible (SI), es decir, que no tiene solución. Específicamente, la tercera fila de la matriz escalonada corresponde a la ecuación

$$0x + 0y + 0z + 0t = -5$$

obteniendo como resultado $0 = -5$, que es absurdo. Por lo tanto, decimos que no tiene solución.

Prof. Gustavo Sosa