Examen de Matemática I - 05 de julio del 2011

Ejercicio 1

a) Demostrar que $A \oplus C = B \oplus C \Rightarrow A = B$ ("$\oplus$" significa ***diferencia simétrica***)

Demostremos por el absurdo, supongamos que $A \neq B$, queremos llegar a que $A \oplus C \neq B \oplus C$.
Si $A \neq B$, $\exists\, x \in A \wedge x \notin B$ (podemos analizar análogamente el caso $x \in B \wedge x \notin A$): para este x existen dos posibilidades:

1. $x \in C$:
$$\left.\begin{array}{l} x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in (A \cap C) \Rightarrow x \notin A \oplus C \\ x \notin B \wedge x \in C \Rightarrow x \in (C - B) \Rightarrow x \in B \oplus C \end{array}\right\} \Rightarrow A \oplus C \neq B \oplus C$$
2. $x \notin C$:
$$\left.\begin{array}{l} x \in A \wedge x \notin C \Rightarrow x \in (A - C) \Rightarrow x \in A \oplus C \\ x \notin B \wedge x \notin C \Rightarrow x \notin (A \cup C) \Rightarrow x \notin B \oplus C \end{array}\right\} \Rightarrow A \oplus C \neq B \oplus C$$

En ambos casos concluimos que si $A \neq B$ entonces $A \oplus C \neq B \oplus C$.
Se concluye lo mismo de forma análoga para el caso ($x \in B \wedge x \notin A$).

b) Investigar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Para cada una, si es verdadera, demostrarla, si es falsa, dar un contraejemplo.

i) $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$ es falso.
Si consideramos $A = \{-1,0,1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, y $C = \{1,2,3\}$
claramente $A \cap C = B \cap C = C$ pero $A \neq B$.

ii) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$ es falso.
Si consideramos $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$, y $C = \{a, b, x, y\}$
claramente $A \cup C = B \cup C = C$ pero $A \neq B$.

Ejercicio 2

a) Sea R una relación sobre un conjunto A. Se define una nueva relación T sobre el mismo conjunto A, de la siguiente forma: $(b, a) \in T \leftrightarrow (a, b) \in R$.

i) Demostrar que R es simétrica si y solo si $R = T$

($\Rightarrow$) R es simétrica $\leftrightarrow$ $\forall\, a, b \in A$: si $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
Si $(a, b) \in R \underbrace{\Rightarrow}_{R\ es\ simétrica} (b, a) \in R \underbrace{\Rightarrow}_{def} (a, b) \in T$, de donde deducimos que $R = T$

($\Leftarrow$) Si $(a, b) \in R \underbrace{\Rightarrow}_{R=T} (a, b) \in T \underbrace{\Rightarrow}_{def} (b, a) \in R$, de donde deducimos que R es simétrica.

ii) Demostrar que si R es de orden, entonces T también es una relación de orden.
Si R es de orden entonces R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. ¿ T es reflexiva?
$\forall\, a \in A$: si $(a, a) \in R \underbrace{\Rightarrow}_{def} (a, b) \in T \Rightarrow T$ es reflexiva

2. ¿ T es antisimétrica?
$\forall\, a,b \in A$: si $(a,b) \in T \wedge (b,a) \in T \;\Rightarrow\; a=b$

$$\left.\begin{array}{c} (b,a) \in T \underbrace{\Rightarrow}_{def} (a,b) \in R \\ \wedge \\ (a,b) \in T \underbrace{\Rightarrow}_{def} (b,a) \in R \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{R\ es\ antisimétrica} a=b$$

3. ¿ T es transitiva?
$\forall\, a,b,c \in A$: si $(a,b) \in T \wedge (b,c) \in T \;\Rightarrow\; (a,c) \in T$

$$\left.\begin{array}{c} (a,b) \in T \underbrace{\Rightarrow}_{def} (b,a) \in R \\ \wedge \\ (b,c) \in T \underbrace{\Rightarrow}_{def} (c,b) \in R \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{R\ es\ transitiva} (c,a) \in R \underbrace{\Rightarrow}_{def} (a,c) \in T$$

b) Se considera $f\colon A \to B$ una función total y se define una relación S sobre A, de la siguiente forma: $\forall\, a,b \in A:\; a\,S\,b \leftrightarrow (f\ a) = (f\ b)$, demostrar que S es de equivalencia.

$\forall\, a,b \in A:\; a\,S\,b \leftrightarrow (f\ a) = (f\ b)$

- Reflexiva: $\forall\, a \in A:\; a\,S\,a \leftrightarrow (f\ a) = (f\ a)$, trivial pues $f\colon A \to B$ una función total.

- Simétrica: $\forall\, a,b \in A$: Si $a\,S\,b \Rightarrow b\,S\,a$
  $a\,S\,b \Rightarrow (f\ a) = (f\ b) \Rightarrow (f\ b) = (f\ a) \Rightarrow b\,S\,a$

- Transitiva: $\forall\, a,b,c \in A$: Si $a\,S\,b \wedge b\,S\,c \Rightarrow a\,S\,c$
  $$\left.\begin{array}{l} a\,S\,b \Rightarrow (f\ a) = (f\ b) \\ b\,S\,c \Rightarrow (f\ b) = (f\ c) \end{array}\right\} \Rightarrow (f\ a) = (f\ c) \Rightarrow a\,S\,c$$

c) Considerando el caso particular de $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,/\, (f\ n) = \begin{cases} 5 & \text{si } n = \dot{3} \\ 6 & \text{si } n = \dot{3}+1 \\ 7 & \text{si } n = \dot{3}+2 \end{cases}$, hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente $\mathbb{Z}/S$. Justificar.

Si $n = \dot{3} \Rightarrow (f\ n) = 5 \Rightarrow [0] = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n = \dot{3}\} = [3] = [6] = [9] = \cdots$
Si $n = \dot{3}+1 \Rightarrow (f\ n) = 6 \Rightarrow [1] = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n = \dot{3}+1\} = [4] = [7] = [10] = \cdots$
Si $n = \dot{3}+2 \Rightarrow (f\ n) = 7 \Rightarrow [2] = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n = \dot{3}+2\} = [5] = [8] = [11] = \cdots$

$\mathbb{Z}/S = \{[a] \in P(\mathbb{Z}) \,/\, a \in \mathbb{Z}\} = \{[0],[1],[2]\}$

Ejercicio 3

Sean $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{2,3,4,9\}$ y $f\colon A \to B \to C$ tal que $(f\ x\ y) = x - y$

a) Hallar $C \subseteq \mathbb{Z}$ para que el f sea sobreyectiva. Justificar.
$(f\ 1\ 9) = 1 - 9 = -8$ es el menor valor que toma la función f y $(f\ 7\ 2) = 7 - 2 = 5$ es el mayor valor.

$5 = 7 - 2 = (f\ 7\ 2)$	$-1 = 3 - 4 = (f\ 3\ 4)$	$-7 = 2 - 9 = (f\ 2\ 9)$
$4 = 7 - 3 = (f\ 7\ 3)$	$-2 = 2 - 4 = (f\ 2\ 4)$	$-8 = 1 - 9 = (f\ 1\ 9)$
$3 = 7 - 4 = (f\ 7\ 4)$	$-3 = 1 - 4 = (f\ 1\ 4)$	
$2 = 4 - 2 = (f\ 4\ 2)$	$-4 = 5 - 9 = (f\ 5\ 9)$	
$1 = 5 - 1 = (f\ 5\ 1)$	$-5 = 4 - 9 = (f\ 4\ 9)$	
$0 = 4 - 4 = (f\ 4\ 4)$	$-6 = 3 - 9 = (f\ 3\ 9)$	

por lo tanto considerando $C = \{x \in Z / -8 \leq x \leq 5\}$ la función f resulta sobreyectiva.

b) Investigar si f es inyectiva. Justificar.

Claramente f no es inyectiva, pues (f 6 4) = (f 4 2) = 2

Ejercicio 4

a) Implementar la función **`esprimo`** que recibe un número entero y nos indica si dicho número es primo o no.

```
resto :: Integer -> Integer -> Integer
resto a b = if (a<b) then a else resto (a-b) b

divisores :: Integer -> [Integer]
divisores x = [a | a <-[1..x], (resto x a)== 0]

largo :: [a] -> N
largo [] = Z
largo (x:p) = S(largo p)

iguales :: N -> N -> Bool
iguales  Z Z = True
iguales  Z (S m) = False
iguales (S n) Z = False
iguales (S n) (S m) = iguales n m

esprimo :: Integer -> Bool
esprimo x = iguales (largo (divisores x)) (S(S Z))
```

b) Definir una función **`listaprimos`** que recibe un entero no negativo **p** devuelve una lista de números primos entre 1 y **p** ordenada en forma decreciente.

```
concat :: [a]->[a]->[a]
concat [] [] = []
concat [] (y:p) = (y:p)
concat (x:s) [] = (x:s)
concat (x:s) (y:p) = x:(concat s (y:p))

invertir :: [a]->[a]
invertir [] = []
invertir (x:s) = concat (invertir s) [x]

listaprimos :: Integer -> [Integer]
listaprimos p = invertir ([a | a <- [1..p], (esprimo a)==True])
```

otra forma:

```
listaprimos :: Integer -> [Integer]
listaprimos p = [a | a <- [p..1], (esprimo a)==True]
```

Ejercicio 5

a) Definir una función **`replica`** que recibe dos argumentos: **p** y **n**, donde **p** representa un elemento de cualquier tipo y **n** es un número natural. Dicha función devuelve una lista de **n** elementos **p** repetidos.
Ejemplo: **`replica`** `True (S(S(S Z)))) = [True,True,True]`

```
replica :: a -> N -> [a]
replica x Z = []
replica x (S n) = x:(replica x n)
```

b) Probar que ∀ n ∈ N: **`largo (replica x n) = n`**

Caso base: n = Z
`replica x Z` $\underbrace{=}_{\text{def } replica}$ `[]` y a su vez `largo [] = Z`

Caso base: n = (S Z)
`largo (replica x (S Z))` $\underbrace{=}_{\text{def } replica}$ `largo (x:(replica x Z))` $\underbrace{=}_{\text{def } largo}$
`S(largo(replica x Z))` $\underbrace{=}_{\text{def } replica}$ `S(largo [])` $\underbrace{=}_{\text{def } largo}$ `S Z`

Hipótesis Inductiva: `largo (replica x n) = n`

Tesis Inductiva: `largo (replica x (S n)) = (S n)`

Demostración:

`largo(replica x (S n))` $\underbrace{=}_{\text{def } replica}$ `largo(x:(replica x n))`
$\underbrace{=}_{\text{def } largo}$ `S(largo(replica x n))` $\underbrace{=}_{\text{H.I.}}$ `(S n)`

Ejercicio 6

Sean: $f: N \to N$, $g: N \to N$, $h: (N \to N) \to N \to N$, $t: \big((N \to N) \to N \to N\big) \to N \to N$,
$p: N \to (N \to N) \to N \to N$, $x, y: N$.
Indicar si las siguientes expresiones tienen tipo (es decir, sin son correctas), en caso afirmativo indicarlo, justificando en todo caso la respuesta.

1. h x y	5. t h	9. f (p 4 f 9) 7
2. h f	6. t (h f)	10. h (t h)
3. g (h f)	7. h (p x g)	11. f (p x g y) (h g)
4. g (h f 5)	8. g (t h x)	12. p (g y) (h f) (t h y)

1. $\left.\begin{array}{r} h: (N \to N) \to N \to N \\ x, y: N \end{array}\right\} \Rightarrow (h\ x\ y)$

   Es incorrecta ya que h recibe en primer lugar un argumento de tipo (N → N).

2. $\left.\begin{array}{r} h: (N \to N) \to N \to N \\ f: N \to N \end{array}\right\} \Rightarrow (h\ f): N \to N$

3. $\left.\begin{array}{r} g: N \to N \\ (h\ f): N \to N \end{array}\right\} \Rightarrow \big(g\ (h\ f)\big)$

   Es incorrecta ya que g recibe un argumento de tipo N pero $(h\ f): N \to N$.

4. $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}5: N\\ (h\ f): N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow (h\ f\ 5): N\\ g: N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow \big(g\ (h\ f\ 5)\big): N$$

5. $$\left.\begin{array}{r}t: \big((N \to N) \to N \to N\big) \to N \to N\\ h: (N \to N) \to N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow (t\ \ h): N \to N$$

6. $$\left.\begin{array}{r}t: \big((N \to N) \to N \to N\big) \to N \to N\\ (h\ f): N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow t\ (h\ f)$$

Es incorrecta ya que t recibe en primer lugar un argumento de tipo $\big((N \to N) \to N \to N\big)$.

7. $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}p: N \to (N \to N) \to N \to N\\ x: N\\ g: N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow (p\ x\ g): N \to N\\ h: (N \to N) \to N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow \big(h\ (p\ x\ g)\big): N \to N$$

8. $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}t: \big((N \to N) \to N \to N\big) \to N \to N\\ x: N\\ h: (N \to N) \to N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow (t\ h\ x): N\\ g: N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow \big(g\ (t\ h\ x)\big): N$$

9. $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}p: N \to (N \to N) \to N \to N\\ 4, 9: N\\ f: N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow (p\ 4\ f\ 9): N\\ f: N \to N\\ 7: N\end{array}\right\}\Rightarrow (f\ (p\ 4\ f\ 9)\ 7)$$

Es incorrecta pues f recibe un solo argumento de tipo N

10. $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}t: \big((N \to N) \to N \to N\big) \to N \to N\\ h: (N \to N) \to N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow (t\ h): N \to N\\ h: (N \to N) \to N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow (h\ (t\ h)): N \to N$$

11. $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}p: N \to (N \to N) \to N \to N\\ x, y: N\\ g: N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow (p\ x\ g\ y): N\\ \left.\begin{array}{r}h: (N \to N) \to N \to N\\ g: N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow (h\ g): N \to N\\ f: N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow \big(f\ \ (p\ x\ g\ y)\ (h\ g)\big)$$

Es incorrecta pues f recibe un solo argumento de tipo N

12. $$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}g: N \to N\\ y: N\end{array}\right\}\Rightarrow (g\ y): N\\ \left.\begin{array}{r}t: \big((N \to N) \to N \to N\big) \to N \to N\\ h: (N \to N) \to N \to N\\ y: N\end{array}\right\}\Rightarrow (t\ h\ y): N\\ (h\ f): N \to N\\ p: N \to (N \to N) \to N \to N\end{array}\right\}\Rightarrow \big(p\ \ (g\ y)\ (h\ f)\ (t\ h\ y)\big): N$$