

Logaritmos

Definición: Logaritmo de a en base b

Dados $a \in \mathbb{R}, a > 0$
 $b \in \mathbb{R}, b > 0, b \neq 1$

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Si bien es cierto que para $a = -8$ y $b = -2$ existe $x = 3$ que verifica $(-2)^3 = -8$,
 $a = -16$ y $b = 4$ no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $4^x = -16$.



Estudiamos la existencia de los siguientes logaritmos:

1) $\log_{2x-5}(x-2)$

Para que el logaritmo esté definido debe cumplirse:

$$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

y

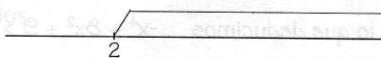
$$2x - 5 > 0 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

y

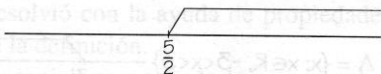
$$2x - 5 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 3$$

Como se deben satisfacer las tres condiciones, basta con intersectar:

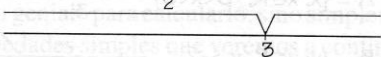
$$A = \{x; x \in \mathbb{R}, x > 2\}$$



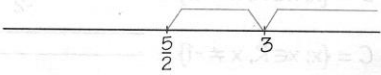
$$B = \{x; x \in \mathbb{R}, x > \frac{5}{2}\}$$



$$C = \{x; x \in \mathbb{R}, x \neq 3\}$$



$$A \cap B \cap C$$



Por lo tanto, existe $\log_{2x-5}(x-2)$ cuando x es mayor que $\frac{5}{2}$ y distinto de 3.

Simbólicamente, lo escribimos:

$$\exists \log_{2x-5}(x-2) \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \text{ y } x \neq 3$$

$$\text{condiciones de existencia } x > \frac{5}{2} \text{ y } x \neq 3$$

2) $\log_{-x+2}(x-6)^2$

El logaritmo existe si: $(x-6)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 6$

$$-x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$-x + 2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Esto significa que:

$$\exists \log_{-x+2}(x-6)^2 \Leftrightarrow x < 2 \text{ y } x \neq 1$$

$$\text{condiciones de existencia: } x < 2 \text{ y } x \neq 1$$

3) $\log_{x+2}(-x^4 + 8x^2 + 9)$

Deben cumplirse simultáneamente: $-x^4 + 8x^2 + 9 > 0$

$$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

$$x + 2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1$$

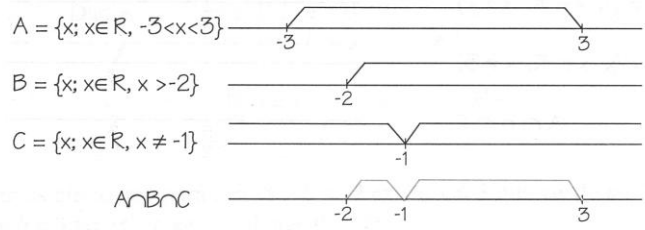
Para hallar las raíces de $(-x^4 + 8x^2 + 9)$, consideramos el cambio de variable $u = x^2$, con lo cual:

$$-u^2 + 8u + 9 = 0 \Leftrightarrow u = 9 \text{ ó } u = -1$$

Por lo tanto: $x = \pm\sqrt{9}$ o sea $x = \pm 3$

$$\text{sg}(-x^4 + 8x^2 + 9) \quad \frac{-}{-3} \quad \frac{+}{3} \quad \frac{-}{-}$$

De lo que deducimos $-x^4 + 8x^2 + 9 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$



Por lo tanto:

$$\exists \lg_{x+2}(-x^4 + 8x^2 + 9) \Leftrightarrow -2 < x < 3 \text{ y } x \neq -1$$

Condiciones de existencia: $-2 < x < 3$ y $x \neq -1$

4) Calculemos algunos logaritmos:

- 1) $\lg_3 27 = 3$ ya que $3^3 = 27$
- 2) $\lg_{\frac{1}{2}} 64 = -6$ ya que $(\frac{1}{2})^{-6} = 64$
- 3) $\lg_{25} 5 = \frac{1}{2}$ ya que $25^{\frac{1}{2}} = 5$
- 4) $\lg_6 1 = 0$ ya que $6^0 = 1$
- 5) $\lg_{18} 18 = 1$ ya que $18^1 = 18$
- 6) $\lg_{\frac{1}{6}} \frac{1}{36} = 2$ ya que $(\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36}$
- 7) $10 \cdot \lg_{10^{-12}} 10^{-6} = 60$ ya que $10^6 = \frac{10^{-6}}{10^{-12}}$
- 8) $\lg_5 28 = \alpha$ con $\alpha \in [2, 3]$ ya que $5^2 < 28 < 5^3$
 Intenten Uds. aproximar α con error menor a 0,01 mediante aproximaciones decimales sucesivas
- 9) $\lg_7 \frac{\sqrt[3]{343^5}}{343^3} = 4$

Como ocurre muy a menudo, la aplicación directa de la definición, es poco útil a la hora de realizar cálculos.

propiedades de los logaritmos

1) $\lg_b b = 1$

Para verificar esta propiedad, usamos la definición de logaritmo:

$$b^1 = b \Leftrightarrow \lg_b b = 1$$

2) $\lg_b 1 = 0$

Demostración a cargo de ustedes.

3) $\lg_a a = \frac{1}{k}$

Por definición:

$(a^k)^{\frac{1}{k}} = a$ igualdad que se verifica por propiedad de la potenciación.

4) $\lg_b(a \cdot c) = \lg_b a + \lg_b c$

Demostración:
Llamemos:

$$\alpha = \lg_b a \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{definición} \end{matrix} \quad b^\alpha = a$$

$$\beta = \lg_b c \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{definición} \end{matrix} \quad b^\beta = c$$

Multiplicamos miembro a miembro: $b^\alpha \cdot b^\beta = a \cdot c$

$$\Leftrightarrow b^{\alpha+\beta} = a \cdot c \quad \Leftrightarrow \lg_b(a \cdot c) = \alpha + \beta$$

Sustituyendo los números α y β , se concluye:

$$\lg_b(a \cdot c) = \lg_b a + \lg_b c$$

$$5) \lg_b(a : c) = \lg_b a - \lg_b c$$

$$6) \lg_b a^k = k \cdot \lg_b a \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Para demostrarla, llamemos $\alpha = \lg_b a \Leftrightarrow b^\alpha = a$
definición

Elevemos ambos miembros de la igualdad a la potencia k :

$$(b^\alpha)^k = a^k \Leftrightarrow b^{\alpha k} = a^k \Leftrightarrow \lg_b a^k = \alpha \cdot k$$
definición

Al sustituir α , concluimos que: $\lg_b a^k = k \cdot \lg_b a$

$$7) \lg_b \sqrt[m]{a^n} = \frac{n}{m} \cdot \lg_b a \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}^* \quad \text{cuando } k = \frac{n}{m}$$

$$8) \lg_b \frac{1}{a^n} = -n \cdot \lg_b a \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{cuando } k = -n$$

$$\lg_7 \frac{\sqrt[3]{343^5}}{343^{\frac{1}{3}}} = \lg_7 \sqrt[3]{343^5} - \lg_7 343^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 4$$

Prop. 5 de
logaritmos Prop. 6 y 7
de logaritmos

$$9) \lg_b a = \frac{\lg_c a}{\lg_c b} \rightarrow \text{propiedad de cambio de base}$$

Para demostrarla, llamemos $\alpha = \lg_b a$ y $\beta = \lg_c b$

Por definición: $b^\alpha = a$ y $c^\beta = b$

Sustituimos b , en la primera igualdad
 del renglón precedente $(c^\beta)^\alpha = a$

Por propiedad de la potencia: $c^{\beta\alpha} = a$

que por definición de logaritmo: $\lg_c a = \alpha\beta$

Sustituimos α y β : $\lg_c a = \lg_b a \cdot \lg_c b \quad \therefore \lg_b a = \frac{\lg_c a}{\lg_c b}$

$$10) \lg_{\frac{1}{b}} a = -\lg_b a$$

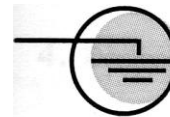
$$11) \lg_{b^n} a = \frac{1}{n} \cdot \lg_b a$$

$$12) b^{\lg_b a} = a$$

Para justificar esta propiedad, llamemos $\alpha = \lg_b a$

Por definición de logaritmos $b^\alpha = a$

En esta última igualdad, sustituimos α , concluyendo que: $b^{\lg_b a} = a$



Realicemos otros cálculos:

$$1) \lg_{27} 81 = \lg_{3^3} 3^4 = 4 \cdot \lg_{3^3} 3 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Prop. 6 de
logaritmos Prop. 3 de
logaritmos

$$2) \lg_6 69120 - \lg_6 320 = \lg_6 \frac{69120}{320} = \lg_6 216 = 3$$

Prop. 5 de
logaritmos

Ejercicios

1. Calcular:

- | | | |
|---------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\lg_3 27$ | 2) $\lg_{243} 81$ | 3) $\lg_{343} \frac{1}{7}$ |
| 4) $\lg_2 64$ | 5) $\lg_{121} 1331$ | 6) $\lg_{5^4} 125^{-1}$ |
| 7) $\lg_6 1$ | 8) $\lg_{\frac{1}{5}} 625$ | 9) $\lg_4 \sqrt[3]{256}$ |

2. Calcular, aplicando propiedades:

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\lg_5 \sqrt{\sqrt{125}}$ | 2) $\lg_7 \frac{7^{11} \sqrt{49}}{7^6}$ | 3) $\lg_4 \frac{\sqrt{64 \cdot 16^9}}{(216)^{\frac{2}{3}}}$ |
| 4) $\lg_5 5^3 \cdot \sqrt[3]{625}$ | 5) $\lg_2 \frac{\sqrt{2}}{2^3}$ | 6) $\lg_a \sqrt[8]{a^5}$ |
| 7) $\lg_7 \frac{7^4}{\sqrt{7}}$ | 8) $\lg_5 \left[\frac{5 \cdot \sqrt{125}}{25} \right]^3$ | 9) $\lg_{11} \left\{ \left[(11^3)^2 \right]^5 \right\}$ |
| 10) $\lg_2 \sqrt{\sqrt{2}}$ | 11) $\lg_3 \frac{3^6}{\sqrt[3]{81}}$ | 12) $\lg_2 \frac{4^5 \cdot 16^2}{64}$ |
| 13) $\lg_9 \frac{3^4 \cdot \sqrt{27}}{243}$ | 14) $\lg_{13} \frac{\sqrt[3]{13}}{13 \cdot (169)^2}$ | 15) $\lg_2 \sqrt[7]{\frac{2^3}{128}}$ |

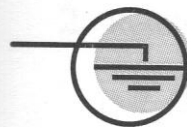
4. Demostrar, usando propiedades:

- 1) $\lg_{\sqrt{b}} a = n \cdot \lg_b a$
- 2) $\lg_{b^n} a^n = \lg_b a$
- 3) $\lg_{\sqrt[n]{b}} a = \lg_b a$
- 4) $\lg_b a \cdot \lg_a b = 1$

5. Estudiar existencia de los siguientes logaritmos:

- | | | |
|---------------------------|-------------------------------|---|
| 1) $\lg_{x+1} (x-1)$ | 2) $\lg_{7x-6} (x^2-4)$ | 3) $\lg_{2x+1} x+3 $ |
| 4) $\lg_{3-x} (3x-12)$ | 5) $\lg_{2x-10} (x-2)^2$ | 6) $\lg_{ x+1 } (2x+1)$ |
| 7) $\lg_{x^2} (5+x)(x-6)$ | 8) $\lg_3 (x^4-50x^2+49)$ | 9) $\lg_{4x^3-3x} (2x^4+x^2-10)$ |
| 10) $\lg_{5x-11} (-x)$ | 11) $\lg_{ x-4 } (-x^2+7x-6)$ | 12) $\lg_{\frac{1}{x}} (-3x^3+7x^2+7x-3)$ |

ecuaciones logarítmicas



Resolvamos las siguientes ecuaciones:

$$1) \lg_{\sqrt{5}}(x-1) + \lg_5(x+3)^2 = 2$$

Estudiemos previamente la existencia de los logaritmos:

$$\exists \lg_{\sqrt{5}}(x-1) \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\exists \lg_5(x+3)^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -3$$

condiciones de existencia: $x > 1$

Transformemos ahora la ecuación, en otra más manejable:
Por propiedades de los logaritmos:

$$2. \lg_5(x-1) + 2 \lg_5(x+3) = 2$$

Cancelamos

$$\lg_5(x-1) + \lg_5(x+3) = 1$$

Aplicamos propiedad 4)

$$\lg_5(x-1)(x+3) = 1$$

Por definición: $(x-1)(x+3) = 5$

Operando: $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ó } x = 2$

¡Una observación importante!

$\{-4, 2\}$ es el conjunto solución de $\lg_5(x-1)(x+3) = 1$ ya que este logaritmo existe cuando: $(x-1)(x+3) > 0$ o sea $x < -3$ ó $x > 1$.

Sin embargo, es $\{2\}$ la solución de la ecuación planteada inicialmente, ya que -4 no cumple con las condiciones de existencia.

Se desprende de esto la necesidad del estudio previo de la existencia, o en su defecto, la verificación de los números hallados en la ecuación original, para decidir si pertenecen o no al conjunto solución.

En resumen, el conjunto solución de $\lg_{\sqrt{5}}(x-1) + \lg_5(x+3)^2 = 2$ es $S = \{2\}$

$$2) (x+2) \cdot \lg_{x+2}(-4x^2+1) = 0$$

Aplicando la propiedad hankeliana, debe cumplirse:

$$x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

ó

$$\lg_{x+2}(-4x^2+1) = 0 \Leftrightarrow -4x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$$

Los posibles valores son $x = -2$ ó $x = 0$. Decidamos si pertenecen o no a la solución, verificando en la ecuación original:

si $x = -2$ $\nexists \lg_{x+2}(-4x^2+1) \therefore -2 \notin S$

si $x = 0$ $(0+2) \cdot \lg_2 1 = 2 \cdot 0 = 0$

La verificación realizada indica que $S = \{0\}$

ejercicios

1. Hallar el conjunto solución, de las siguientes ecuaciones:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\lg_2 x = 4$ | 2) $\lg_8(3x-4) = 1$ | 3) $\lg_3(5x+6) = -1$ |
| 4) $\lg_5(4x-3) = -2$ | 5) $\lg_x 49 = 2$ | 6) $\lg_{3x} 102 = 1$ |
| 7) $\lg_{5x} 175 = 2$ | 8) $\lg_2 \frac{1}{x} = -3$ | 9) $\lg_{4x-3}(3x+12) = 1$ |
| 10) $\lg_x(x+6) = -1$ | 11) $\lg_{\frac{1}{x+2}}(x^3-7x-6) = -3$ | 12) $\lg_{\frac{-16}{x}}(68-x^2) = 2$ |
| 13) $\lg_{x^2+1}(-x^4+x^3+8x^2+x-1) = 2$ | 14) $\lg_{\sqrt{2}}(x-1) = 4$ | 15) $\lg_{ 2x-3 } \frac{2x^2+x}{x+4} = 0$ |

2. Resolver las siguientes ecuaciones, aplicando propiedades:

- $\lg_{\sqrt{2}}(2x-x^2) + \lg_2(3x+9)^2 - 4 \lg_4 x(x+5) = \lg_6 36$
- $\lg_{25} x \cdot \lg_5 x - \frac{1}{3} \lg_3 27 = 3$
- $x \lg_3(x-26) = 3^{27}$
- $\lg_2 \sqrt{5x+8} + \lg_4(2x+3) = \lg_2 3 + \lg_2 5$
- $\lg \left(\lg_{\frac{1}{8}} 81 \right) = 4$
- $\lg(7x-9)^2 + 2 \lg(3x-4) = 2$