

Principio de Inducción Estructural

Se quiere probar una propiedad para todos los elementos de un conjunto que está definido en forma inductiva.

Sea A un conjunto inductivo cualquiera y P un predicado definido sobre A ,

$P : A \rightarrow \text{Bool}$

Se desea probar el siguiente enunciado:

$(\forall x \in A)(P(x))$

1. Se debe probar que P se verifica para cada uno de los elementos que se infieren de las cláusulas base.
2. Para cada cláusula inductiva, se debe probar que si P se verifica para las premisas de la cláusula entonces P se verifica para la conclusión.
3. Habiendo probado lo indicado en 1) y 2), habremos probado $(\forall x \in A)(P(x))$

El principio que nos permite afirmar esto último se denomina ***Principio de Inducción Estructural***, que es más conocido, en el caso en que A es el conjunto de los números naturales, por el nombre ***Principio de Inducción Completa***.

Enunciado del Principio de Inducción Estructural

Sea A un conjunto definido inductivamente y P un predicado definido sobre A ,
 $P: A \rightarrow \text{Bool}$.

Si para cada regla de la definición inductiva de A , de la forma $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \rightarrow a$ se verifica $(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n) \rightarrow P(a))$, entonces se verifica $(P(x))$ para todo elemento x de A .

En una prueba que se realiza utilizando el principio de Inducción Estructural:

- La presunción de que P se verifica para las premisas de una regla se denomina *Hipótesis Inductiva*.
- La prueba de que P se verifica para la conclusión, bajo el supuesto de que se verifica para las premisas se denomina *Paso Inductivo* de la demostración.
- En el caso de los axiomas, la Hipótesis Inductiva es vacía, simplemente se debe probar P para la conclusión, la prueba para un axioma se denomina *Paso Base* de la demostración.

Inducción en la estructura de los números naturales:

Veamos cómo se aplica el principio de inducción estructural en el caso de los naturales.

Sea P un predicado unario que recibe un natural,
 $P: \mathbb{N} \rightarrow \text{Bool}$.

Para probar $P(x)$ para todo natural:

1. Se prueba $P(0)$
2. Suponiendo $P(n)$ para un cierto natural n , se prueba $P(S(n))$

Se ha probado P , para todo natural

Probaremos el siguiente teorema trivial para ver la aplicación del principio:
 $(\forall n \in \mathbb{N})(n+0 = n)$

Prueba:

1. Paso base

Se debe probar que la propiedad se verifica para 0, es decir $0+0=0$, trivial.

2. Paso inductivo

Hipótesis inductiva: $x+0=x$

Tesis inductiva: $(S\ x)+0 = (S\ x)$

Prueba del paso inductivo:

$$(S\ x)+0 = (S(x+0)) = (S\ x)$$

Inducción en la estructura de las listas:

Si se quiere probar una cierta propiedad $P: \text{list } A \rightarrow \text{Bool}$ para todo elemento de $\text{list } A$:

$$(\forall x \in \text{list } A)(P\ x)$$

El conjunto (tipo) definido inductivamente es $\text{list } A$, conjunto de todas las listas sobre un cierto conjunto A , por lo tanto la prueba se realizará por inducción en la estructura de las listas.

Probaremos ahora la siguiente propiedad:

$$(\forall x \in \text{list } A)(\forall a \in A)(\text{largo}(\text{cons } a \ x)) > 0$$

Prueba:

1. Paso base

Se debe probar que la propiedad se verifica para nil, es decir $(\text{largo}(\text{cons } a \ \text{nil})) > 0$, por definición de largo, $(\text{largo}(\text{cons } a \ \text{nil})) = 1 + (\text{largo } \text{nil}) = 1 + 0 > 0$, entonces está probado.

2. Paso inductivo

Hipótesis inductiva: $(\forall a \in A)(\text{largo}(\text{cons } a \ s)) > 0$

Tesis inductiva: $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\text{largo}(\text{cons } b \ (\text{cons } a \ s))) > 0$

Prueba del paso inductivo:

Por definición de largo, $(\text{largo}(\text{cons } b \ (\text{cons } a \ s))) = 1 + (\text{largo}(\text{cons } a \ s)) > 0$ por HI

Probar las siguientes propiedades:

a. suma_S: $(\forall n, m \in \mathbb{N})(\text{suma } n \ (\text{suma } m)) = (\text{suma } (\text{suma } n \ m))$

b. suma_conm: $(\forall n, m \in \mathbb{N})(\text{suma } n \ m) = (\text{suma } m \ n)$

c. P1: $(\forall l \in \text{list } A)(\text{concat } l \ \text{nil}) = l$

d. P2: $(\forall l \in \text{list } A)(\forall a \in A)(\text{not}((\text{cons } a \ l) = \text{nil}))$

e. P3: $(\forall l, q \in \text{list } A)(\forall n \in A)((\text{cons } n \ (\text{concat } l \ q)) = (\text{concat } (\text{cons } n \ l) \ q))$

f. P4: $(\forall l, q \in \text{list } A)((\text{largo}(\text{concat } l \ q)) = (\text{largo } l) + (\text{largo } q))$

g. P5: $(\forall l \in \text{list } A)((\text{largo}(\text{invertir } l)) = (\text{largo } l))$

h. P6: $(\forall l, q, p \in \text{list } A)((\text{concat } l \ (\text{concat } q \ p)) = (\text{concat } (\text{concat } l \ q) \ p))$

i. P7: $(\forall l, q \in \text{list } A)((\text{invertir}(\text{concat } l \ q)) = (\text{concat}(\text{invertir } q) \ (\text{invertir } l)))$

j. P8: $(\forall l, q \in \text{list } A)(\forall f: N \rightarrow N)((\text{mapear } f \ (\text{concat } l \ q)) = (\text{concat}(\text{mapear } f \ l) \ (\text{mapear } f \ q)))$

k. P9: $(\forall l, q \in \text{list } A)(\forall P: N \rightarrow \text{bool})(\text{filtrar } P \ (\text{concat } l \ q)) = (\text{concat}(\text{filtrar } P \ l) \ (\text{filtrar } P \ q))$

l. P10: $(\forall l \in \text{list } A)((\text{invertir}(\text{invertir } l)) = l)$