Examen 2 de marzo de 2009

Ejercicio 1

Sea $R \subseteq N x N$, tal que $(x, y) \in R \leftrightarrow \sqrt{3x-y} < 4$

Investigar si R verifica las siguientes propiedades:

Reflexiva, simétrica, irreflexiva, antisimétrica, asimétrica, transitiva.

Justificar en todos los casos las respuestas.

Ejercicio 2

Sean A, B y E conjuntos. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar la respuesta, dando una prueba para la misma.

1. $A \in B \ y \ B \in D \ \Rightarrow \ A \in D$
2. $A \cap B = A \cap E \quad \Rightarrow \quad (B \subset E) \vee (E \subset B)$

Ejercicio 3

Para los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 - 3x = \left| x^2 - 5x - 6 \right| \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \ / \ 2 \leq x^2 - 3x \leq 6 \right\}$$

1. Calcular A – B
2. ¿Cuántos subconjuntos diferentes se pueden formar con elementos de $A \cup B$?
3. ¿De cuántas formas se pueden tomar los elementos de $A \cup B$ para conformar subconjuntos de 4 elementos?
4. ¿Cuántas funciones inyectivas $f : B \rightarrow A$ diferentes se pueden formar ?, ¿Cuántas sobreyectivas?

Ejercicio 4

1. Definir una función que reciba una secuencia y un natural y devuelva la secuencia resultado de multiplicar toda la secuencia dada por el natural dado.
2. Definir por casos la función *capicua*, que recibe una secuencia y devuelve un valor del conjunto bool. Devuelve true si y solo sí la secuencia recibida es capicúa.

   ❖ *Ejemplos: capicua([1,7,6,7,1]) = true*
   capicua([3,4,5,4,6]) = false

3. Definir la función *borrar_n*, que recibe un natural n y una secuencia de números naturales y devuelve la secuencia formada por el resultado de borrar de la secuencia dada los n primeros elementos.

Para la secuencia nil, siempre devuelve nil.

   ❖ *Ejemplos: borrar_n(3,[2,3,4,5,1]) = [5,1]*
   borrar_n(3, [1,1]) = nil

Ejercicio 5

Dadas las siguientes definiciones:
x y z: nat
l s: list_N
h: nat → nat
g: nat → list_N → nat
f: (nat → list_N) → nat → list_N
t: nat → list_N

- Indicar si las siguientes expresiones tienen tipo
  - En caso afirmativo indicar el tipo.
  - En caso negativo explicar por qué se considera que no tiene tipo.
- Si la expresión representa una función explicar en lenguaje natural su dominio y codominio (en otras palabras, qué recibe y qué devuelve).

1. h l	7. g t	13. f t (h y)
2. h x	8. f t	14. g 8 nil_N
3. h x y	9. f (t x) z	15. g (h z) (t z)
4. g h x	10. g (t x s) s	16. f t (g x s)
5. g (h x)	11. f t t	17. f t (g x (f t (g x s)))
6. g (h x) s	12. h (g x l)	18. g (g x s)

Ejercicio 6

En el estrado de un jurado hay 11 sillas, y el jurado tiene 11 miembros:
1. ¿De cuántas formas se puede ubicar el jurado en el estrado?
2. Si faltaron 4 miembros, ¿de cuántas formas se pueden ubicar en las 11 sillas los presentes?
3. Si hay oportunidades en que participan los suplentes y en esta vinieron 3 de ellos, ¿de cuántas formas se podrán ubicar en las 11 sillas, asumiendo que algunos quedarán parados?
4. El presidente del jurado se desea ubicar exactamente en el centro de sus colegas, ¿de cuántas formas se pueden ubicar los 11 miembros?
   a. ¿Y si faltaron 5?
   b. ¿Y si en esta oportunidad también participan algunos suplentes y en total son 15?
5. El presidente quiere estar en el centro y el vicepresidente a uno de los lados de él, no le importa cuál. ¿Cuántas formas para ubicarse tiene el jurado, suponiendo que están los 11?
   a. ¿Y si faltaron 3?
   b. ¿Y si en esta oportunidad también participan algunos suplentes y en total son 14?
6. Hoy participan sólo 6 del total, no les importa dónde sentarse, pero quieren estar en orden de altura, ¿Cuántas posibilidades tienen?

Ejercicio 7

i) Probar que $\sum_{i=0}^{n} C_i^n$ es múltiplo de 2 $\forall n, \quad n \in \mathbb{N}$

ii) Calcular $\sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right)$ en forma exacta.