Examen 26 de febrero de 2010

Ejercicio 1:

Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones respecto a los conjuntos A, B y C son verdaderas o falsas.
En caso de ser verdadera, demostrarla; si es falsa, dar un contraejemplo.

i) Si (A – B) es un conjunto finito, entonces B tiene que ser un conjunto finito.
ii) Si A y B son conjuntos infinitos, entonces $A \cap B$ es un conjunto infinito.

Ejercicio 2:

Dadas las siguientes relaciones, indicar cuales son relaciones de equivalencia. Justificar.

a) En el conjunto de los números naturales, $a\ R_1\ b \Leftrightarrow a.b = a + b$
   Expresar [5], si existe.
b) En el conjunto de los puntos del plano cuyas coordenadas sean números enteros, se define la relación: $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$
   Expresar [(5,6)], si existe. Interpretar gráficamente, si corresponde.

Ejercicio 3:

1. Definir una función **repetir** que construya una lista replicando n veces un elemento de cualquier tipo. Indicar su tipo.
2. Probar la siguiente propiedad: $(\forall\ n \in N)((\text{largo (repetir n a)}) = n)$
3. Definir una función cuyo tipo sea el siguiente:
   `Int → [Int] → ([Int], [Int])` que dados un entero positivo n y una lista divida la lista en el elemento enésimo.

Ejercicio 4:

Considerar la definición inductiva de naturales vista en el curso.
1) Definir la función **potencia**: $N \rightarrow N \rightarrow N$ que dados dos naturales n y m devuelve el resultado de calcular la potencia n^m.
   Definir **potencia** en Haskell.
2) Probar la siguiente proposición:
   $(\forall\ a, n, m \in N)((\text{potencia a n})*(\text{potencia a m}) = (\text{potencia a (n+m)}))$

Ejercicio 5:

Tres números reales, a, b y c, se dice que son "Pitagóricos" si verifican que $a^2 + b^2 = c^2$. Para el caso de a, b y c números naturales, implementar una función en Haskell que encuentre algún par de valores a y b para un valor de c dado. En el caso de no existir, que responda "no hay".
Por ejemplo: pitag 5 = (3,4) pitag 17 = (8,15) pitag 16 ="no hay"
Indicar el tipo de dicha función.

Ejercicio 6:

Sean a y b números naturales, con a > b.
Si "m" es su mínimo común múltiplo y "d" es su máximo común divisor, calcularlos, sabiendo que $m - d = 162 \quad y \quad a.b - d^2 = 972$.

Ejercicio 7: a) Los barcos usan banderas como sistema de señales. Un barco tiene 5 banderas: 2 rojas, 2 verdes y 1 amarilla. ¿ Cuántas señales diferentes usando las 5 banderas se pueden hacer, si dos banderas del mismo color no pueden estar juntas ?
b) En un escuela para ciegos se está diseñando un software para detectar contraseñas usando notas musicales. Hay siete notas musicales. ¿Cuántas notas se necesitan tocar si tienen que haber como mínimo 10000 contraseñas diferentes ?

Ejercicio 8:
a) Demostrar que en cualquier grupo de 5 números naturales cualesquiera hay por lo menos 2 que dan el mismo resto cuando se dividen entre 4.
b) Sea n un número natural cualquiera. Demostrar que en cualquier grupo de n numeros naturales consecutivos hay exactamente uno que es divisible por n.
c) Probar que $2^{2n+2} + 5^{2n-1}$ es múltiplo de 21 para todo natural mayor que cero.

Los ejercicios 3 y 4 son obligatorios. De los demás, hay que elegir otros 2.
Total del examen: 4 ejercicios.
