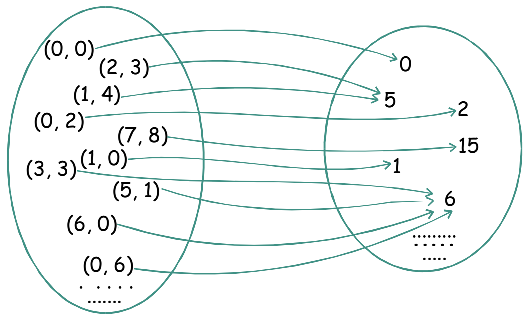
ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS[1]

Se da la relación entre dos conjuntos mediante el siguiente diagrama:



i) Observa la correspondencia con atención y agrega en el conjunto de partida tres elementos y sus correspondientes en el conjunto de llegada.
ii) Describe el conjunto de partida y el de llegada y asígnale un nombre a cada uno.
iii) La relación que estamos analizando, ¿es una función? Si así lo fuera, ¿con qué nombre la bautizarías?

Definición

> Dado un conjunto A, $A \neq \emptyset$, decimos que $*$ es una *operación binaria definida en A*, si y sólo si, $*$ de $A \times A$ en A es una función.
>
> Simbólicamente:
>
> $*$ es una *operación binaria definida en A* $(A \neq \emptyset) \Leftrightarrow * : A \times A \rightarrow A$ es una función

De esta definición se deducen dos propiedades muy importantes:

- ***Unicidad:*** el resultado de operar dos elementos de A es único.
- ***Clausura:*** el resultado de operar dos elementos de A es otro elemento de A.

Si retomamos el ejemplo inicial, seguramente acordaremos que la función descrita la podemos llamar ***adición*** y designarla con el símbolo "$+$". Tiene como dominio el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y como codominio el conjunto $\mathbb{N}$.

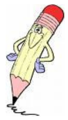
$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una operación binaria definida en $\mathbb{N}$: el resultado de sumar dos elementos de $\mathbb{N}$ es un único elemento de $\mathbb{N}$.

Consideremos $(7, 8) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $15 \in \mathbb{N}$.

Como $(7,8) \xrightarrow{+} 15$, escribimos $7 + 8 = 15$

Cuando definamos en forma genérica una operación en un cierto conjunto A, utilizaremos letras minúsculas de nuestro alfabeto (a, b, c,...) para representar los elementos de A y un símbolo arbitrario para designar a la operación ($*$, #, !, ◊, Δ, ...).

[1] Para la elaboración de este material se tuvo en cuenta el repartido *Estructuras Algebraicas* del curso 2008 de Fundamentos de la Matemática.



Investiga si las siguientes relaciones corresponden a operaciones binarias definidas en los conjuntos que se indican en cada caso:

1) $*$ definida en $A = \{0, 1, 2\}$, tal que:

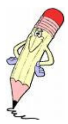
$*$	**0**	**1**	**2**
0	0	2	0
1	2	0	1
2	0	1	2

2) # definida en $\mathbb{Z}$, tal que: $a \# b = \dfrac{a+b}{2}$

3) $\Diamond$ definida en $\mathbb{Q}$, tal que: $a \Diamond b = a + b - ab$

4) *División entera* definida en $\mathbb{N}$: dados $a \in \mathbb{N}$ (dividendo) y $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ (divisor), llamamos cociente (c) y resto (r) de la división entera a dos números naturales que cumplen: i) $a = bc + r$ y ii) $r < b$.

Ya sabemos que en el conjunto de los números reales se define más de una operación (adición y multiplicación, por ejemplo) y que esas operaciones cumplen varias propiedades.



5) Considera la adición definida en $\mathbb{R}$ e investiga qué propiedades cumple.

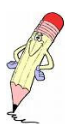
Enunciaremos ahora algunas propiedades de las operaciones binarias. Una operación binaria puede, eventualmente, no cumplir ninguna de ellas.

Propiedades de las operaciones

Consideramos un conjunto A, $A \neq \emptyset$, y $*$ una operación binaria definida en A.

Asociativa

$*$ es *asociativa* $\Leftrightarrow \forall a, a \in A, \forall b, b \in A, \forall c, c \in A, ((a * b) * c = a * (b * c))$

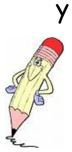


6) Investiga en las actividades 1) a 4), en aquellos casos en que la relación definida es una operación binaria, si se cumple esta propiedad.

Existencia del elemento neutro

Existe *neutro* de $* \Leftrightarrow \exists e, e \in A, \forall a, a \in A, (a * e = e * a = a)$

Observa que para que un elemento sea neutro de una operación, exigimos que lo sea a derecha y a izquierda; usualmente decimos que el neutro es bilateral.



7) Investiga en las actividades 1) a 4), en aquellos casos en que la relación definida es una operación binaria, si se cumple esta propiedad.

Existencia del elemento simétrico

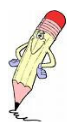
Para cada elemento de A existe *simétrico* $\Leftrightarrow \forall a,\ a \in A,\ \exists a',\ a' \in A,\ (a * a' = a' * a = e)$, siendo e el elemento neutro de la operación $*$.
Notación: Al elemento simétrico de a lo escribiremos a'

Observa que para que un elemento sea simétrico, exigimos que lo sea a derecha y a izquierda; usualmente decimos que el simétrico es bilateral.

Como recordarás, para el caso de la adición al simétrico (si existe) se lo denomina *opuesto*, y para el caso de la multiplicación al simétrico (si existe) se lo llama *inverso*.

Conmutativa

$*$ es *conmutativa* $\Leftrightarrow \forall a,\ a \in A,\ \forall b,\ b \in A,\ (a * b = b * a)$



8) Investiga en las actividades 1) a 4), en aquellos casos en que la relación definida es una operación binaria, si se cumple la propiedad existencia del elemento simétrico y la propiedad conmutativa.

9) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 6\}$ y la relación $\blacklozenge : A \times A \to A$ tal que $a \blacklozenge b = \text{MCD}(a, b)$.

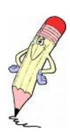
i) Representa la relación en una tabla.
ii) Investiga si $\blacklozenge$ es una operación definida en A. Justifica tu respuesta.
En caso afirmativo, analiza si $\blacklozenge$ cumple con las propiedades, conmutativa, existencia de neutro y de simétrico.

Consideramos ahora un conjunto A, $A \neq \emptyset$, y dos operaciones binarias definidas en A: $*$ y $\bullet$.

Distributiva

Diremos que la operación $\bullet$ es distributiva respecto de $* \Leftrightarrow \forall a,\ a \in A, \forall b,\ b \in A, \forall c,\ c \in A,$

$$(a \bullet (b * c) = (a \bullet b) * (a \bullet c)) \wedge ((b * c) \bullet a = (b \bullet a) * (c \bullet a))$$



10) a) La operación intersección ($\cap$), ¿es distributiva respecto de la operación unión ($\cup$)?
Y la operación unión ($\cup$), ¿es distributiva respecto de la operación intersección ($\cap$)?
b) En el conjunto de los reales, ¿la multiplicación es distributiva respecto de la adición? Y la adición, ¿es distributiva respecto de la multiplicación?

Las propiedades de la adición en $\mathbb{R}$ que enunciaste en la actividad 5) son, en general, conocidas por todos. En lo que hemos trabajado hasta ahora, parece que estas propiedades siempre se cumplen; entonces, ¿cuál es la importancia de ellas? Todas las operaciones definidas en cualquier conjunto de objetos matemáticos, ¿las cumplirán siempre? Y si es así, ¿para qué las enunciamos cada vez?

Si te pidiéramos resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación: $x + 3 = 7$, seguramente llegarías a que $x = 7 - 3$; por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es $S = \{\ 4\ \}$.

¿Cuáles son las propiedades que, en forma tácita, permitieron resolver la ecuación?

$$x + 3 = 7 \quad \underset{\substack{+\text{ es operación binaria (unicidad)} \\ \text{y cancelativa de la adición}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 3) + (-3) = 7 + (-3) \quad \underset{\substack{\text{Asociativa} \\ \text{de la adición}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + (3 + (-3)) = 7 - 3 \quad \underset{\substack{\text{Existencia de opuesto} \\ \text{de la adición}}}{\Leftrightarrow}$$

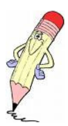
$$\Leftrightarrow \quad x + 0 = 7 - 3 \quad \underset{\substack{\text{Existencia de neutro} \\ \text{de la adición}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 7 - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 4$$

Por lo tanto: $S = \{ 4 \}$.

Como la adición es una operación binaria definida en el conjunto de los números reales que cumple estas cuatro propiedades, puedes pasar de la primera ecuación a la última. Si alguna de estas propiedades no se cumpliera, tendríamos que ingeniarnos para resolver la ecuación de otro modo ya que no podríamos "pasar para el otro lado".



11) Se considera el conjunto $H = \{A, B, C, \varnothing\}$ y la operación intersección ($\cap$) definida en H, siendo $A = \{0, 1\}$, $B = \{0\}$ y $C = \{1\}$.

a) Construye la tabla de la operación:

$\cap$	A	B	C	$\varnothing$
A				
B				
C				
$\varnothing$				

b) Investiga si la operación intersección definida en H, tiene elemento neutro.
c) ¿Todo elemento de H tiene elemento simétrico según la operación intersección?
d) Resuelve en H las siguientes ecuaciones: i) $A \cap X = A$ ii) $B \cap X = B$

Volvamos a terreno conocido. Sabemos que en el conjunto $\mathbb{R}$ la operación adición ($+$) tiene elemento neutro (el 0) y que este es único. Veamos una posible justificación:

Teorema: ***unicidad del neutro***

Dado A, $A \neq \varnothing$, y $*$ una operación binaria definida en A.
Si existe neutro de $*$, entonces es único.

Dem: Supongamos que existen e_1 y e_2, ambos neutros de $*$:

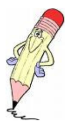
$$\left.\begin{array}{l}\text{por ser } e_2 \text{ neutro: } e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1 \\ \\ \\ \text{por ser } e_1 \text{ neutro: } e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2\end{array}\right\} \underset{\substack{* \text{ es operación} \\ \text{binaria (unicidad)}}}{\Rightarrow} \quad e_1 = e_2$$

Algo similar sucede con la unicidad del elemento simétrico:

Teorema

Dado A, $A \neq \emptyset$, y $*$ una operación binaria definida en A, que cumple la propiedad asociativa.

Si existe simétrico de a ($a \in A$), entonces es único.



12) Demuestra el teorema anterior.

En un conjunto no vacío se pueden definir una o más operaciones, y dichas operaciones pueden cumplir determinadas propiedades. De acuerdo a las propiedades que cumplan, se dirá que el conjunto con la o las operaciones, tienen determinada *estructura*.

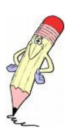
Grupo

Definición

Dado el conjunto G, $G \neq \emptyset$, y una relación $*$ de $G \times G$ en G, diremos que $(G, *)$ es un grupo, si y sólo si, $*$ es una operación binaria que cumple las propiedades, asociativa, existencia del elemento neutro y existencia del elemento simétrico.

Simbólicamente:

$$(G, *) \text{ es grupo } \Leftrightarrow \begin{cases} * \text{ es una operación binaria en } G \\ * \text{ es asociativa} \\ \text{Existe elemento neutro de } * \\ \text{Para cada elemento de } G \text{ existe su simétrico} \end{cases}$$



13) Investiga si $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{N}, .)$ y $(\mathbb{Z}, .)$, son grupos. Justifica tu respuesta.

14) Sea la operación $\Diamond : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $a \Diamond b = a - b$. ¿Es $(\mathbb{Z}, \Diamond)$ grupo?

Propiedades que se cumplen en una estructura de grupo

Se consideran el conjunto G , $G \neq \emptyset$, y $*$ una operación binaria definida en G tal que $(G, *)$ es grupo.

1) $\forall a,\ a \in G, (a')' = a$

2) $*$ cumple con la propiedad cancelativa:

$*$ es cancelativa $\Leftrightarrow \forall a,\ a \in G, \forall b,\ b \in G,\ \forall c,\ c \in G,$

$$(a * b = a * c \rightarrow b = c) \wedge (b * a = c * a \rightarrow b = c)$$

3) $\forall a,\ a \in G, \forall b,\ b \in G, ((a * b)' = (b' * a'))$

4) $\forall a_i,\ a_i \in G, \forall n,\ n \in \mathbb{N}, ((a_0 * a_1 * \ldots * a_n)' = (a'_n * \ldots * a'_1 * a'_0))$

5) Si e es el elemento neutro de $* \Rightarrow (p * p = p \Leftrightarrow p = e)$

Definición

$$(G, *) \text{ es grupo conmutativo o abeliano} \Leftrightarrow \begin{cases} (G, *) \text{ es grupo} \\ * \text{ es conmutativa} \end{cases}$$

Aplicaciones a las ecuaciones:

I) $(G, *)$ es grupo. Resolveremos en G la ecuación: $a * x = b$

$$a * x = b \quad \underset{\substack{* \text{ es operación binaria (unicidad),} \\ \text{existencia de simétrico} \\ \text{y cancelativa de } *}}{\Leftrightarrow}$$

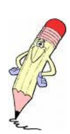
$$\Leftrightarrow \quad a' * (a * x) = a' * b \quad \underset{\text{Asociativa de } *}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a' * a) * x = a' * b \quad \underset{\text{Existencia de simétrico}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad e * x = a' * b \quad \underset{\text{Existencia de neutro de } *}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = a' * b$$

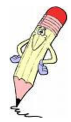
Por lo tanto: $S = \{a' * b\}$



15) $(G, *)$ es grupo. Resuelve en G la ecuación: $x * a = b$

De la aplicación anterior y de la actividad 15), podemos enunciar una sexta propiedad que se cumple en una estructura de grupo:

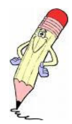
6) Si $(G, *)$ es grupo, las ecuaciones $a * x = b$ y $x * a = b$ tienen una única solución.



16) Como habrás observado, si bien estas ecuaciones tienen solución única, éstas no son iguales. ¿Qué se debería cumplir para que fueran iguales?

II) $(G, *)$ es grupo. Resolveremos en G la ecuación: $a * x * b * c = b$. Como sabemos que se cumplen las propiedades de grupo podemos resolverla así:

$$\begin{aligned}
& a * x * b * c = b && \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & x * b * c = a' * b && \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & x * b = a' * b * c' && \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & x = a' * b * c' * b' && \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & S = \{a' * b * c' * b'\}
\end{aligned}$$



17) Si en el ejemplo anterior, $(G, *)$ es grupo abeliano, ¿se puede reducir la solución?

18) Sea $P = \{\, x \,/\, x = 2n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ e $I = \{\, x \,/\, x = 2n + 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

i) Investiga si $(P, +)$ e $(I, +)$ tienen estructura de grupo.

ii) Considera el conjunto $E = P \cup I$. ¿Es $(E, +)$ grupo? Justifica.

iii) Decide y justifica si la siguiente proposición es verdadera o falsa:
$((A \cup B), \heartsuit)$ es grupo $\Rightarrow$ $(A, \heartsuit)$ y $(B, \heartsuit)$ son grupos.

Anillo

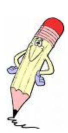
Definición

Dados el conjunto A, $A \neq \varnothing$, una operación binaria $*$ definida en A y una relación $\bullet$ de $A \times A$ en A, diremos que $(A, *, \bullet)$ es un anillo, si y sólo si, $(A, *)$ es grupo abeliano, $\bullet$ es una operación binaria que cumple la propiedad asociativa y además se cumple que $\bullet$ es distributiva respecto de $*$.

Simbólicamente:

$$(A, *, \bullet) \text{ es anillo } \Leftrightarrow \begin{cases} (A,*) \text{ es grupo abeliano} \\ \bullet \text{ es una operación binaria en } A \\ \bullet \text{ es asociativa} \\ \bullet \text{ es distributiva respecto de } * \end{cases}$$

Notación: Si $(A, *, \bullet)$ es anillo y $a \in A$, escribiremos Op(a) al simétrico de a en la operación $*$.



19) En cada uno de los siguientes casos, investiga si estamos frente a un anillo:

i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

ii) $(\mathbb{Z}, *, \heartsuit)$, siendo $*$ y $\heartsuit$ dos operaciones binarias definidas en $\mathbb{Z}$ tales que:

$$a * b = a + b + 1 \ \text{ y } \ a \heartsuit b = a + b + ab$$

Propiedades que se cumplen en una estructura de anillo

Se consideran el conjunto A, $A \neq \emptyset$, y dos operaciones binarias $*$ y $\bullet$ definidas en A, tales que $(A, *, \bullet)$ es anillo.

1) **Propiedad de absorción:** $\forall a,\ a \in A,\ a \bullet e = e \bullet a = e$ (siendo e el neutro de $*$).

Terminología: habitualmente a e se lo denomina *elemento absorbente* de la operación $\bullet$.

2) $\forall a,\ a \in A, \forall b,\ b \in A$, $\mathrm{Op}(a) \bullet b = a \bullet \mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(a \bullet b)$.

3) $\forall a,\ a \in A, \forall b,\ b \in A$, $\mathrm{Op}(a) \bullet \mathrm{Op}(b) = a \bullet b$.

Anillo sin divisores de cero

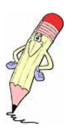
Definición

$(A, *, \bullet)$ es un anillo sin divisores de cero, si y sólo si, $(a \bullet b) \neq e$ si $a \neq e$ y $b \neq e$; siendo e el elemento neutro de la operación $*$.

Simbólicamente:

El anillo $(A, *, \bullet)$ no tiene divisores de cero $\Leftrightarrow$

$$\forall a,\ a \in A, \forall b,\ b \in A,\ (a \neq e \wedge b \neq e \rightarrow a \bullet b \neq e)$$



20) Da ejemplos de anillos sin divisores de 0. Recuerda que en el liceo viste unos cuantos.

Otra forma de enunciar esta propiedad es:

El anillo $(A, *, \bullet)$ no tiene divisores de cero $\Leftrightarrow$

$$\forall a,\ a \in A, \forall b,\ b \in A,\ (a \bullet b = e \rightarrow a = e \vee b = e);$$

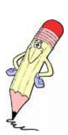
siendo e el elemento neutro de la operación $*$.

Esta última, se denomina en general, propiedad *hankeliana*.

Observación: la propiedad hankeliana es la recíproca de la propiedad de absorción. ¡Ambas propiedades no son equivalentes!

O sea que el anillo $(A, *, \bullet)$ tiene divisores de cero $\Leftrightarrow$

$$\exists a,\ a \in A, \exists b,\ b \in A,\ (a \neq e \wedge b \neq e \wedge a \bullet b = e)$$

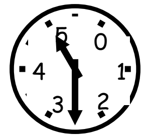


21) Trabajaremos con una matemática distinta: la matemática del reloj.

Si te preguntan cuanto es $11 + 16$ seguramente contestarás 27.

Pero si te preguntan: son las 11, dentro de 16 horas, ¿qué hora será? En este caso no vas a decir que son las 27 sino que son las 3. Es decir, en la matemática del reloj "$11 + 16 = 3$" y vamos a escribirlo así $11 \oplus 16 = 3$ para que no haya confusión.

Para facilitar el trabajo usaremos un reloj "más chico" de sólo seis números:



Tenemos entonces el conjunto $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y definimos en él las relaciones $\oplus$ y $\otimes$ a través de las siguientes tablas:

$\oplus$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2				0	
3						
4					2	
5			1			4

$\otimes$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1		3		5
2	0	2	4		2	
3	0		0	3	0	3
4			2		4	2
5			4	3		1

a) Observa cada tabla, busca el patrón de construcción y complétalas.
b) Investiga si $\oplus$ y $\otimes$ son operaciones en H.
c) Asumiendo que $\oplus$ cumple la propiedad asociativa, investiga si $(H, \oplus)$ es grupo abeliano.
d) Asumiendo que $(H, \oplus, \otimes)$ es un anillo, investiga si tiene divisores de cero.

Propiedad cancelativa de $\bullet$ en el anillo $(A, *, \bullet)$

$\bullet$ es cancelativa $\Leftrightarrow \begin{cases} a \bullet b = a \bullet c \wedge a \neq e \ \Rightarrow b = c \\ b \bullet a = c \bullet a \wedge a \neq e \ \Rightarrow b = c \end{cases}$, siendo e el neutro de la operación $*$.

Teorema

Un anillo $(A, *, \bullet)$ no tiene divisores de cero, si y sólo si, se cumple la propiedad cancelativa de $\bullet$.

Directo:

Demostraremos que si $(A, *, \bullet)$ anillo sin divisores de cero, entonces:

$$\begin{cases} 1)\ b \bullet a = c \bullet a \wedge a \neq e \ \rightarrow b = c \\ 2)\ a \bullet b = a \bullet c \wedge a \neq e \ \rightarrow b = c \end{cases}$$

1) Dem:

$$b \bullet a = c \bullet a \underset{\substack{(A,\, *,\, \bullet)\text{ anillo} \\ (\clubsuit)}}{\Rightarrow}$$

$$(b \bullet a) * Op(c \bullet a) = e \underset{Op(x \bullet y) = Op(x) \bullet y}{\Rightarrow} (b \bullet a) * (Op(c) \bullet a) = e \underset{\substack{\text{Prop. distributiva de } \bullet \\ \text{respecto de } *.}}{\Rightarrow}$$

$$(b * Op(c)) \bullet a = e \underset{\text{Prop. hankeliana } (a \neq e)}{\Rightarrow} b * Op(c) = e \underset{\substack{(A,\, *,\, \bullet)\text{ anillo} \\ (\clubsuit)}}{\Rightarrow} b = c$$

Actividad: Indica cuáles son la propiedades del anillo $(A, *, \bullet)$ que se han utilizado en $(\clubsuit)$.

2) Análogamente se demuestra: $a \bullet b = a \bullet c \wedge a \neq e \ \rightarrow b = c$

Recíproco:

Si en un anillo $(A,\ *,\ \bullet)$ se cumple la propiedad cancelativa de $\bullet$, entonces el anillo no tiene divisores de cero.

Dem:

Una forma de demostrar que el anillo $(A,\ *,\ \bullet)$ no tiene divisores de cero es probar que se cumple la propiedad hankeliana:

Sean $a \in A$ y $b \in A$, si $a \bullet b = e$ pueden pasar dos cosas: $b = e \ \vee \ b \neq e$

Si $b = e$ ya está demostrado

Si $b \neq e$ probaremos que $a = e$

$$\forall c,\ c \in A,\ c \bullet b = (c \bullet b) * e \underset{a \bullet b = e}{\Rightarrow} c \bullet b = (c \bullet b) * (a \bullet b) \underset{\substack{\text{Prop. distributiva de } \bullet \\ \text{respecto de } *.}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{c} c \bullet b = (c * a) \bullet b \\ \wedge \\ b \neq e \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underset{\text{Prop. cancelativa de } \bullet}{\Rightarrow} c = c * a \underset{\substack{\text{por H)} \\ (\blacklozenge)}}{\Rightarrow} a = e$$

Actividad: Explica cómo se aplica la hipótesis en $(\blacklozenge)$.

Anillo conmutativo

$$(A,\ *,\ \bullet) \text{ es anillo conmutativo } \Leftrightarrow \begin{cases} (A,\ *,\ \bullet) \text{ es anillo} \\ \bullet \text{ es conmutativa} \end{cases}$$

Anillo conmutativo con unidad

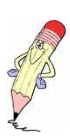
Definición

$$(A,\ *,\ \bullet) \text{ es anillo conmutativo con unidad} \Leftrightarrow \begin{cases} (A, *, \bullet) \text{ es anillo conmutativo} \\ \bullet \text{ tiene elemento neutro} \end{cases}$$

Dominio de Integridad

Definición

Todo anillo conmutativo con unidad y sin divisores de cero se denomina dominio de integridad.



22) Investiga si $(P,\ +,\ \times)$ es un dominio de integridad, siendo $P = \{x \ / \ x \in \mathbb{Z},\ x = 2h,\ h \in \mathbb{Z}\}$

23) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Se definen las relaciones $\oplus$ y $\otimes$ de la siguiente manera:

- $\begin{cases} x \oplus y = x + y & \text{si} \quad x + y \leq 4 \\ x \oplus y = x + y - 4 & \text{si} \quad x + y > 4 \end{cases}$
- $x \otimes y$ es igual al resto de dividir $x.y$ entre 4; siendo x e y elementos de A.

a) Construye la tabla de doble entrada para $\oplus$ y $\otimes$.
b) Investiga si $\oplus$ y $\otimes$ son operaciones definidas en A.
c) Investiga, si corresponde, si $(A, \oplus)$ y $(A, \otimes)$ son grupos.
d) ¿Es $(A, \oplus, \otimes)$ un anillo?

Cuerpo

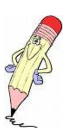
Definición

Dado el conjunto K, $K \neq \emptyset$, $(K, *, \bullet)$ es un *cuerpo*, si y sólo si, $(K, *, \bullet)$ es un anillo conmutativo con unidad, tal que todos los elementos de K (excepto el neutro de la primera operación) tienen simétrico respecto a la segunda operación (al simétrico de a respecto de la operación $\bullet$, lo notaremos: $\text{Inv}(a)$).
Simbólicamente:

$$(K, *, \bullet) \text{ es un } \textit{cuerpo} \Leftrightarrow \begin{cases} (K, *, \bullet) \text{ es anillo conmutativo con unidad} \\ \forall a, a \in K - \{e\}, \exists\ \text{Inv}(a), \text{Inv}(a) \in K, (a \bullet \text{Inv}(a) = \text{Inv}(a) \bullet a = n) \\ \text{siendo } e \text{ neutro de la operación } * \text{ y } n \text{ neutro de la operación } \bullet \end{cases}$$

Teoremas

1) Los cuerpos no admiten divisores de cero.
2) En todo cuerpo se cumple la cancelativa de $\bullet$ para elementos distintos del neutro de $*$.
3) Si $b \neq e$, la ecuación $b \bullet x = a$, admite solución única en K; siendo e el neutro de la operación $*$.
4) $\text{Op}(\text{Inv}(a)) = \text{Inv}(\text{Op}(a))$, $\forall\, a \in K$, $a \neq e$; siendo e el neutro de la operación $*$.



24) Investiga si $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ son cuerpos.

Al que no quiere sopa, dos platos

1) Se consideran los conjuntos $A = \{0, 1\}$, $B = \{0\}$, $C = \{1\}$ y $\varnothing$.

a) Construye las tablas de las siguientes operaciones:

$\cup$	A	B	C	$\varnothing$
A				
B				
C				
$\varnothing$				

$\cap$	A	B	C	$\varnothing$
A				
B				
C				
$\varnothing$				

$-$	A	B	C	$\varnothing$
A				
B				
C				
$\varnothing$				

b) Aplicando la parte a), resuelve:

i) $A \cup X = A$ ii) $B \cup X = B$ iii) $C \cup X = B$ iv) $A - X = \varnothing$ v) $(A - X) \cap B = \varnothing$.

2) Completa la siguiente tabla sabiendo que corresponde a una operación binaria con neutro y conmutativa. ¿Cuántas soluciones hay?

$*$	a	b	c
a		a	
b			c
c	a		

3) En el conjunto $\mathbb{Q}$ se define ! tal que $a \,!\, b = \dfrac{a+b}{2}$

Investiga si se trata de una operación y, en caso afirmativo, estudia si es asociativa y conmutativa.

4) En $\mathbb{N}$ se definen las operaciones $*$ y $\bullet$ tales que $a * b = a + 2b$ y $a \bullet b = 2ab$

a) ¿Son conmutativas?
b) ¿Son asociativas?
c) ¿Es distributiva alguna de las dos operaciones con respecto a la otra?

5) Estudia la existencia de elemento neutro de la operación Δ definida:

a) en $\mathbb{Q}$, tal que $a \,\Delta\, b = \dfrac{ab}{2}$

b) en $\mathbb{Z}$, tal que $a \,\Delta\, b = a^2 + b$

c) en $\mathbb{N}$, tal que $a \,\Delta\, b = 2a + ab$

d) en $\mathbb{N}$, tal que $a \,\Delta\, b = a$

6) Dado el conjunto $\mathbb{Z}$ y la operación $\bullet$ tal que $a \bullet b = a + (b + 1)$.

Investiga si $(\mathbb{Z}, \bullet)$ es un grupo conmutativo.

7) Sea $A = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x(x^2 - 4)(2x + 1) = x(x^2 - 4)(x + 2)\}$.

a) Define una operación en A (♥) que sea conmutativa y que tenga neutro.

b) Indica si cada elemento tiene simétrico.

c) Halla x, si existe, tal que $(a \heartsuit x) \heartsuit (b \heartsuit x) = (a \heartsuit a) \heartsuit b$; siendo a el menor elemento de A y b el mayor.

8) Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y la operación $*$ definida por la siguiente tabla:

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

a) Asumiendo que $*$ es asociativa, investiga si $(A, *)$ es grupo.

b) Calcula: $(0 * 1) * (2 * 3)$

c) Investiga si $(2 * 3) * 0 = 0 * [1 * (2 * 3)]$

d) Halla usando propiedades, si es posible, los $x \in A$ que verifiquen las siguientes igualdades:

i) $[(x * 2) * 0] * (2 * x) = x * x$

ii) $x * (x * x) = x$

9) En el conjunto $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ se define la operación $\diamond$ tal que $(a, b) \diamond (x, y) = (ax, bx + y)$.

¿Es $(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}, \diamond)$ un grupo?

10) Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $(A, \spadesuit)$ un grupo conmutativo, tal que $a \spadesuit b = c$, $a \spadesuit c = c$ y $b \spadesuit d = a$

a) Realiza la tabla de la operación ♠.

b) Resuelve en A:

i) $a \spadesuit (x \spadesuit b) = d$

ii) $[b \spadesuit (x \spadesuit d)] \spadesuit (x \spadesuit a) = c$

11) En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definen las operaciones $*$ y $\bullet$ tales que:

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d) \text{ y } (a, b) \bullet (c, d) = (ac, 0).$$

Investiga si $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *, \bullet)$ es un anillo.

12) Sea $(A, *)$ un grupo conmutativo. Prueba que para todo u, x, y, z pertenecientes a A se verifica: $(u * x) * (y * z) = (u * (x * y)) * z = u * (x * (y * z)) = (x * z) * (y * u)$

13) Dado el conjunto $A = \{0, 1\}$ y las operaciones + y • definidas en A tales que:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

¿Es $(A, +, \bullet)$ cuerpo?