Ecuaciones de recurrencia

Introducción

Comencemos con un ejemplo:

Sucesión de Fibonacci: $(a_n) = (1,1,2,3,5,8,13,...)$
Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores, o sea:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

Una expresión de este tipo, en que el término general de la sucesión se escribe en función de algunos términos anteriores, recibe el nombre de **relación de recurrencia**, **ecuación de recurrencia** o **ecuación en diferencias**.
Para obtener un término concreto de una sucesión dada en forma recurrente debemos ir obteniendo todos los anteriores, lo cual no siempre es práctico. ¿Cuál es el término a_{100} de la sucesión de Fibonacci?

Encontrar una solución a la ecuación de recurrencia es determinar una expresión del tipo $a_n = f(n)$ en la que el término general dependa solo de la posición que ocupa y no de los anteriores.
Para que la solución sea única es necesario conocer algunos términos de la sucesión, lo que llamaremos **condiciones iniciales**. En el ejemplo anterior $a_1 = 1 \; y \; a_2 = 1$.

Ejemplo: Las sucesiones (1, 2, 4, 8, 16, ...) y (3, 6, 12, 24, 48, ...) satisfacen la misma relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1}$, si $n \geq 1$. Pero la condición inicial $a_0 = 1$ junto con la relación de recurrencia determinan de forma única la primera de estas dos sucesiones. La condición inicial $a_0 = 3$ junto con $a_n = 2a_{n-1}$ para $n \geq 1$, determina la segunda.

Definición: Una **ecuación de recurrencia lineal de orden k con coeficientes constantes** es una relación

$$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} + ... + c_{n-k}a_{n-k} = b_n, \quad n \geq k \qquad \textbf{(I)}$$

donde $c_n, c_{n-1}, ..., c_{n-k}$ son constantes ($\neq 0$) y (b_n) es una sucesión conocida. Diremos que **(I)** es **homogénea** si $b_n = 0$.

Ecuación de recurrencia lineal homogénea

Ecuación de recurrencia lineal de primer orden

Sea $(a_n): a_n = 3a_{n-1}$ (esta expresión no define una única progresión geométrica, debemos dar las condiciones iniciales)
Sea entonces $(a_n): a_n = 3a_{n-1}$ $, con\ n \geq 1 \quad y \quad a_0 = 5$

Esta ecuación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1}$ depende del elemento inmediato anterior, por eso decimos que es de primer orden.

$$a_0 = 5$$
$$a_1 = 3a_0 = 3 \cdot 5$$
$$a_2 = 3a_1 = 3 \cdot (3a_0) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$$
$$a_3 = 3a_2 = 3 \cdot (3 \cdot (3a_0)) = 3^3 \cdot 5$$
.
.
.
$$a_n = 3^n \cdot 5 \quad esta\ es\ la\ solución\ de\ la\ ec. de\ recurrencia$$

Ejercicio 1: Encuentra la solución general de las siguientes ecuaciones de recurrencia

a) $b_n = 6b_{n-1} \quad con\ n \geq 1, b_0 = 13$

b) $c_n = \frac{1}{5}c_{n-1} \quad con\ n \geq 1, c_0 = 7$

En general:

La solución de la ecuación de recurrencia $a_n = d \cdot a_{n-1} \quad con\ n \geq 1, \quad a_0 = A \quad es$ $\boxed{a_n = A \cdot d^n}$

Ejemplo: Resolver $a_n = 7 \cdot a_{n-1}$ $, n \geq 1 \quad y \quad a_2 = 98$

$$a_n = 7 \cdot a_{n-1} \quad \Rightarrow \ d = 7$$
$$a_n = A \cdot d^n$$
$$a_2 = A \cdot 7^n \Rightarrow \ 98 = A \cdot 7^2 \Rightarrow \ A = 2$$

Por lo que la solución es:

$$\boxed{a_n = 2 \cdot 7^n}$$

Ejercicio 2: Encuentra la solución general de:

a) $a_{n+1} = 1,5a_n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 3$

b) $3a_{n+1} - 4a_n = 0 \quad n \geq 0 \quad a_1 = 4$

Ejercicio 3: Determina a_n si $a_{n+1}^2 = 5a_n^2 \quad a_n > 0, n \geq 0 \quad y \quad a_0 = 2$
(Sugerencia: cambio de variable $b_n = a_n^2$)

Ejercicio 4: Un banco paga un interés (compuesto mensual) del 6% anual. Si se depositan U \$ 1000 el 1º de abril, ¿cuánto dinero tendrá 3 meses después?

Ecuación de recurrencia lineal de segundo orden

$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} = 0 \qquad n \geq 2$ (homogénea)

Se busca una solución de la forma

$$\boxed{a_n = Ar^n}$$

Sustituyendo en : $c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} = 0$

$$c_n Ar^n + c_{n-1}Ar^{n-1} + c_{n-2}Ar^{n-2} = 0$$

Factorizando se obtiene: $r^{n-2}\left(c_n r^2 + c_{n-1}r + c_{n-2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad c_n r^2 + c_{n-1}r + c_{n-2} = 0 \quad (\text{ ya que } r \neq 0)$$

$\left(c_n r^2 + c_{n-1}r + c_{n-2}\right)$ Se le llama POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Según las raíces del polinomio característico las soluciones de las ecuaciones de recurrencia pueden ser de dos tipos:

- 2 raíces distintas: $r_1 \ y \ r_2$ (reales o complejas), entonces la solución es $\boxed{a_n = \alpha\, r_1^n + \beta\, r_2^n}$
- Raíces repetidas, la solución es $\boxed{a_n = \alpha\, r^n + \beta \cdot nr^n}$

Ejemplos: Resolver

a) $\begin{cases} a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 \quad n \geq 2 \\ a_0 = 1,\ a_1 = 2 \end{cases}$

El polinomio característico $x^2 + x - 6 = 0$ tiene *dos raíces reales distintas* que son 2 y –3, entonces la solución general es $\boxed{a_n = \alpha\, 2^n + \beta\,(-3)^n}$

Para determinar α y β con las condiciones frontera $a_0 = 1, a_1 = 2$ obtenemos el sistema
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - 3\beta = 2 \end{cases}$$
cuya solución es $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.Esto permite establecer que la solución única de la ecuación de recurrencia dada es $a_n = 2^n$.

b) $\begin{cases} a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \\ a_0 = 5,\ a_1 = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2 \\ a_0 = 1,\ a_1 = 1 \end{cases}$

d) Ahora puedes encontrar la solución general de la sucesión de Fibonacci $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$

$a_1 = 1$ y $a_2 = 1$

Ecuación de recurrencia lineal no homogénea

$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} + \ldots + c_{n-k}a_{n-k} = b_n, \quad n \geq k \qquad con\ \left(b_n\right) = f(n) \neq 0$ **............... (I)**

Se le llama *ecuación de recurrencia homogénea asociada* a la anterior a la ecuación
$$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + c_{n-2}a_{n-2} + \ldots + c_{n-k}a_{n-k} = 0, \quad n \geq k$$

Se aceptará sin demostración la siguiente propiedad: *Cualquier solución* a_n *de la ecuación* **(I),** *se puede escribir de la forma* $\boxed{a_n = p_n + h_n}$ *, donde* p_n *es una solución particular de* **(I)** *y* h_n *es la solución de la ecuación homogénea asociada.*

Ya se vio en la parte anterior como hallar la solución de la ecuación de recurrencia homogénea. Para obtener una solución particular no hay un método general.

Ejemplos de como hallar una solución particular en diferentes casos :

1º) $a_n + 2a_{n-1} = 3$ En este caso $b_n = 3$. Se puede "sospechar" que una solución particular de esta ecuación puede ser de la forma $p_n = A$ (siendo A una constante) Si sustituimos en la ecuación se obtiene : $A + 2A = 3 \Rightarrow 3A = 3 \Rightarrow A = 1$. Por lo tanto $p_n = 1$ es una solución particular.

2º) $a_n + 2a_{n-1} = n^2 - n - 1$ En este caso $b_n = n^2 - n - 1$. Se prueba si puede ser solución una sucesión del mismo tipo, $p_n = An^2 + Bn + C$.

Para eso se sustituye en la ecuación $An^2 + Bn + C + 2\left(A(n-1)^2 + B(n-1) + C\right) = n^2 - n - 1$.

Resolviendo un sistema se obtiene $A = 1/3, B = 1/9, C = -13/27$.

Por lo tanto $p_n = \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{9}n - \frac{13}{27}$ es una solución particular.

3º) $a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n)$. En este caso $b_n = 5(7^n)$, se prueba entonces con una sucesión de la forma $p_n = A(7^n)$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene $A(7^n) - 3A(7^{n-1}) = 5(7^n)$, de donde A = 35/4.

Por lo tanto $p_n = (35/4)\, 7^n$ es una solución particular.

En cada uno de los casos anteriores se ensayó una solución particular generalizando la expresión dada por b_n. Se construyó una solución particular a partir de b_n.

Los coeficientes (A, B, C, etc.) se determinan sustituyendo p_n en la ecuación de recurrencia dada y resolviendo un sistema de ecuaciones.

La técnica que se usó en los tres ejemplos de arriba es válida cuando b_n, o algún término de b_n no sea solución de la ecuación homogénea asociada.

4º) $a_n - a_{n-1} = 2$. Si se prueba con una solución de la forma $p_n = A$, al sustituir se obtiene una contradicción ya que $A - A = 2 \Rightarrow 0 = 2$. Esto significa que no hay ninguna solución particular de esta forma (polinómica de grado 0) En estos casos se probará con soluciones polinómicas de grado superior al que tiene la sucesión b_n.

En este caso si se toma una solución particular del tipo $p_n = An$, sustituyendo se obtiene A =2 . Por lo tanto una solución particular es $p_n = 2n$

5º) $a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n), n \geq 1 \; y \; a_0 = 2$. Se prueba con $p_n = A(3^n)$. Al sustituir a_n por $A(3^n)$ se llega otra vez a una contradicción (0 =5) . No existe entonces ninguna solución particular de la forma $p_n = A(3^n)$. Se ensaya con una de la forma $p_n = An(3^n)$ y se obtiene que $p_n = 5n(3^n)$ es una solución particular.

Recordar que en este caso la solución de la homogénea asociada es $h_n = \alpha \cdot 3^n$ (α se determina aplicando las condiciones iniciales, en este caso al ser $a_0 = 2$ se obtiene $\alpha = 2$).

Entonces la solución general será de la forma $a_n = 2 \cdot 3^n + 5n3^n$ o $a_n = (2 + 5n)(3^n)$

En resumen:

1) Si b_n es un múltiplo constante de una de las formas de la primera columna de la tabla siguiente y no es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces la solución particular p_n tiene la forma que se muestra en la segunda columna.

b_n	p_n
K	A
n	$An+B$
n^2	An^2+Bn+C
r^n	Ar^n
n^2r^n	$r^n\left(An^2+Bn+C\right)$
$\sin(\alpha\, n)$	$A\sin(\alpha\, n)+B\cos(\alpha\, n)$
$\cos(\alpha\, n)$	$A\sin(\alpha\, n)+B\cos(\alpha\, n)$

2) Cuando b_n es una suma de múltiplos constantes de términos como los de la primer columna (y ninguno de estos es solución de la ecuación homogénea asociada), entonces la solución particular se forma como la suma de los términos correspondientes en la segunda columna.
3) Si b_n (o algún término de b_n) es un múltiplo constante de una solución de la ecuación homogénea asociada, multiplicamos la solución particular correspondiente a ese sumando por la mínima potencia de n, n^t para la que ningún sumando de la nueva expresión sea una solución de la ecuación homogénea asociada (Si p_n se "solapa" con h_n, multiplicamos p_n por la menor potencia de n que evite dicho "solapamiento").

EJERCICIOS

1. Encuentre una relación de recurrencia, con una condición inicial, que determine de manera única cada una de las siguientes progresiones geométricas:

i. 2, 10, 50, 250, …

ii. 6, -18, 54, -162, …

iii. 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, …

iv. 7, $\frac{14}{5}$, $\frac{28}{25}$, $\frac{56}{125}$, …

2. Resuelva las siguientes progresiones geométricas.

i. $4a_n - 5a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$, $a_2 = \frac{25}{4}$

ii. $2a_n - 3a_{n-1} = 0$, $n \geq 1$, $a_4 = 81$

3. Si a_n, con $n \geq 1$, es una solución de la relación de recurrencia $a_n - da_{n-1} = 0$, y $a_3 = \frac{153}{49}$, $a_5 = \frac{1377}{2401}$, ¿cuánto vale d?.

4. El número de bacterias en un cultivo es de 800 (aproximadamente) y este número aumenta un 150% cada hora. Use una relación de recurrencia para determinar el número de bacterias presentes 3 horas después.

5. Un banco paga un interés (anual) del 6% para cuentas de ahorros, con un interés compuesto mensual. Utilice una ecuación de recurrencia para determinar cuánto dinero se tendrá depositado un año después si se realiza un depósito de $1000.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de recurrencia.

a) $\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} \\ a_0 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_n = -\frac{5}{4}a_{n-1} \\ a_2 = 25 \end{cases}$

7. Si $a_2 = 2$ y $a_4 = 32$, satisfacen la ecuación de recurrencia $a_n - ba_{n-1} = 0$, donde $n \geq 1$ y b es constante, encuentre a_n.

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de recurrencia.

a) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}, n \geq 2,\ a_0 = 1, a_1 = 0$

b) $a_n = a_{n-1} + n, n \geq 1, a_0 = 0$

c) $2a_n = 7a_{n-1} - 3a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 1$

d) $a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 3$

e) $2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0, n \geq 0, a_0 = 2, a_1 = -8$

f) $a_n = 2a_{n-1} + 5, n \geq 1, a_0 = 1$

g) $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} = 0, n \geq 1, a_0 = 7, a_1 = 3$

h) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, n \geq 2, \ a_0 = 5, a_1 = 12$

i) $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, n \geq 2, \ a_0 = 1, a_1 = 3$

j) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2^n, n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

k) $a_{n+2} + 4a_n = 0, n \geq 0, a_0 = a_1 = 1$

l) $\begin{cases} a_n - a_{n-1} = 2n + 3, n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} a_n - a_{n-1} = 3n^2 - n, n \geq 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de recurrencia.

i. $\begin{cases} a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 3^n, n \geq 2 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} + 6^n, n \geq 2 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 7, n \geq 2 \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

Bibliografía:

- GRIMALDI, Ralph P. “Matemáticas discreta y combinatoria”. Tercera edición. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana
- ROSEN, Kenneth H. “Matemática discreta y sus aplicaciones”. Quinta edición. Editorial Mc Graw Hill