Definiciones

Límites

$f: X \to R,\ X \subset R$

Definición de límite finito:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall E(L,\varepsilon), \exists E^*(a,\delta) / \forall x \in E^*(a,\delta)\ y\ x \in X \Rightarrow f(x) \in E(L,\varepsilon)$$

Definición: $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in X, si\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Definiciones:

- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k \in R, \exists \delta > 0 / si\ \ x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) > k$
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k \in R, \exists \delta > 0 / si\ \ x \in E^*(a,\delta) \Rightarrow f(x) < k$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k > 0 / si\ \ x > k \Rightarrow f(x) \in E(b,\varepsilon)$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k \in R, \exists x_0 \in R / si\ \ x > x_0 \Rightarrow f(x) > k$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k \in R, \exists x_0 \in R / si\ \ x > x_0 \Rightarrow f(x) < k$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k \in R, \exists x_0 \in R / si\ \ x < x_0 \Rightarrow f(x) > k$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k \in R, \exists x_0 \in R / si\ \ x < x_0 \Rightarrow f(x) < k$

Continuidad

Definición: Una función f es continua en un punto $x = a \Leftrightarrow f$ está definida en a y $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Definición: $f\ \ continua\ en\ a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / si\ \ x \in E(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(f(a),\varepsilon)$

Definición: $f\ \ continua\ en\ a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / si\ \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Definición: Continuidad puntual lateral $f \ \ continua \ en \, x = a^{\pm} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a\pm} f(x) = f(a)$

Definición: Continuidad en un intervalo

$$f \ \ continua \ en \left[a,b\right] \Leftrightarrow \begin{cases} f \ \ continua \ en \ x = c, \forall c \in \left(a,b\right) \\ f \ \ continua \ en \ x = a^{+} \\ f \ \ continua \ en \, x = b^{-} \end{cases}$$

Estudio asintótico

Definición: Decimos que una función g es asíntota de la función f en $+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - g(x) \right] = 0$
Análogamente decimos que g es asíntota de la función f en $-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - g(x) \right] = 0$

En particular nos interesamos por el caso $g(x) = mx + n$, es decir una recta.

Teorema:
H) f tiene como asíntota en $+\infty$ $a \ la \ recta \ \ y = mx + n$
T) i) $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
ii) $n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right)$

Esquema para hallar asíntotas de $f(x)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} no \ existe \Rightarrow no \ hay \ asíntota \\ l \Rightarrow asíntota \ \ y = l \\ \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} no \ existe \Rightarrow no \ hay \ asíntota \\ \infty \Rightarrow no \ hay \ asíntota \ y \, hay \, DAV \ (// \, Oy) \\ 0 \Rightarrow no \ hay \ asíntota \ y \, hay \, DAH \ (// \, Ox) \\ m \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx \right) = \begin{cases} no \ existe \Rightarrow no \ hay \ asíntota \\ \infty \Rightarrow no \ hay \ asíntota \ y \, hay \, DA // \ y = mx \\ n \Rightarrow asíntota \ \ y = mx + n \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Derivabilidad

Definición: Cociente incremental.
Sea f una función real y $[a,b]$ un intervalo en el cual f está definida. Llamamos cociente incremental de f en $[a,b]$ al cociente: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ o $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Interpretación geométrica: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\tan\alpha$ .Es la pendiente de la recta secante al gráfico de f en los puntos $\left(a, f(a)\right)$ y $\left(b, f(b)\right)$ (Representa gráficamente)

Definición: Derivada en un punto

Sea $f: I \to R$, a un punto interior de I . Decimos que f es derivable en $x=a \Leftrightarrow$ existe el límite del cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$ y es finito.

Es decir:

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ Existe y es un número real.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ y $f'(a)\in R$

Definición: Recta tangente

Sea f es derivable en $x=a$, llamamos recta tangente al gráfico de f en $x=a$, a la recta de ecuación: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ o $y=f(a)+f'(a)(x-a)$