Conjuntos definidos por Inducción

¿Qué es una definición inductiva?

Intuitivamente....
Definir inductivamente un conjunto significa dar las reglas que indican cómo **construir** los elementos del conjunto. Hay tres tipos de reglas, las denominadas *cláusulas base*, las denominadas *cláusulas inductivas* y la denominada *cláusula de clausura*.

Las **cláusulas base** son aquellas que afirman que ciertos elementos pertenecen al conjunto.
Las **cláusulas inductivas** son aquellas que establecen reglas para construir un elemento del conjunto a partir de otro que pertenezca al conjunto que se está definiendo.
La **cláusula de clausura** establece que ningún elemento pertenece al conjunto, a no ser que se pueda construir mediante la aplicación de las cláusulas base e inductivas dadas un número finito de veces.

<table>
<tr><td colspan="2">Veamos un ejemplo....</td></tr>
<tr><td>Definición inductiva del conjunto N</td><td>Se considera la función S de N en N, <code>S:N->N</code>. A esta función que utilizaremos en la definición de N se le denomina constructor.
1. Cláusula base: 0 ∈ N
2. Cláusula inductiva: (S n) ∈ N sii n ∈ N
3. Cláusula de clausura: Los únicos elementos de N son los que se pueden construir mediante la aplicación de las reglas 1 y 2 un número finito de veces

Observar que la función S es la que nos permite construir un elemento nuevo a partir de uno dado, de allí su denominación. En particular para el conjunto de los naturales se le de el nombre de sucesor</td></tr>
</table>

Algunas observaciones:

- Esta definición está compuesta por una única cláusula base y una única cláusula inductiva, esto no siempre tiene por que ser así. Puede haber más de una cláusula base y/o más de una inductiva.
- En una definición inductiva puede no haber cláusulas inductivas, lo que obligatoriamente tiene que estar definido es al menos una cláusula base.
- La cláusula de clausura se verá muy similar en todas las definiciones inductivas, por lo tanto muchas veces la podemos omitir o simplemente escribir Cláusula de Clausura (CC).

Escribimos ahora una versión resumida de la definición inductiva del conjunto de los números naturales:

i. $0 \in N$
ii. $S(n) \in N$ sii $n \in N$
iii. CC

Es claro que de la definición anterior se deduce que 0 es un elemento del conjunto N, ya que se puede construir aplicando la cláusula base i).

¿Qué otros elementos hay en N?

Debemos construirlos utilizando la cláusula inductiva, para poder construir un natural con la cláusula ii) es necesario que conozcamos algún elemento del conjunto, hasta el momento conocemos uno, y es el 0.

$0 \in N$

Aplicando una vez la cláusula ii), obtenemos:

$(S\ 0) \in N$, y así $(S\ (S\ 0)) \in N$

Siguiendo este razonamiento podemos probar las siguientes afirmaciones:

$(S\ (S\ (S\ 0))) \in N$
$(S\ (S\ (S\ (S\ 0)))) \in N$ . . .

Es decir que hemos construido el conjunto de los números naturales.

Veamos ahora como responder a este tipo de pregunta:

¿Es (S (S (S (S (S 0))))) un elemento de N?

Para ello es necesario probar que se puede construir mediante la aplicación de las reglas i) y ii) un número finito de veces. Veamos....

(S (S (S (S (S 0))))) no es 0, por lo tanto no lo puedo construir mediante la aplicación de la cláusula base, entonces deber ser mediante la cláusula ii).

Si es así entonces debo probar que (S (S (S (S 0)))) es un elemento de N, esto es porque la afirmación de la cláusula inductiva es de la forma "(S x) es un elemento de N, siempre que lo sea x".
Probemos entonces que (S (S (S (S 0)))) es un elemento de N. Razonamos en forma análoga al paso anterior y llegamos a que debemos probar que (S (S (S 0))) es un elemento de N.

Continuando con el mismo razonamiento debemos probar que (S (S 0)), luego que lo es (S 0), luego que lo es 0...

Y 0 es un elemento de N porque así lo expresa la cláusula i) de nuestra definición. Entonces la respuesta a la pregunta es que (S (S (S (S (S 0))))) es un elemento de N.

En resumen....
En una definición inductiva una sentencia α se infiere de un conjunto de reglas $\mathcal{R}$, si hay una regla en $\mathcal{R}$, que permite probar α, tal que cada una de sus premisas también se infiere del conjunto de reglas $\mathcal{R}$. Por ejemplo, consideremos el conjunto de reglas que definen la sentencia "x es un natural", o con otras palabras el conjunto de reglas que definen al conjunto N. Llamémosle $\mathcal{R}_N$. Si la sentencia "n es un natural" se infiere del conjunto de reglas $\mathcal{R}_N$ entonces o bien se infiere de la regla i) en cuyo caso n=0, o bien se infiere de la regla ii) en cuyo caso n = (S m), y "m es un natural" a su vez se debe poder inferir a partir de $\mathcal{R}_N$.