CONJUNTO, RELACIONES, FUNCIONES Y LÓGICA

Fundamentos de la Matemática – 2010

Introducción

"Cuando decimos: 'un elemento pertenece a un conjunto', estamos utilizando nada menos que tres **conceptos primitivos** básicos de nuestra teoría: **elemento, conjunto y pertenencia**."[1]
Para indicar que b es un elemento de un conjunto A, se escribe $b \in A$, que se lee «b pertenece a A». Si por el contrario b no es elemento de A, escribimos $b \notin A$, que se lee «b no pertenece a A».

Si bien *conjunto* es un *concepto primitivo*, cada conjunto particular se puede definir por *extensión* (nombrando cada uno de sus elementos) o por *comprensión* (dando una propiedad que cumplen todos los elementos del conjunto y sólo ellos).

Actividades

1) ¿Puede escribirse cualquier conjunto por extensión? En caso negativo dar un ejemplo.
2) Sea $A = \{x \,/\, x \in \mathbb{N},\ 3 < x \leq 10\}$
 i) Escribe el conjunto A por extensión.
 ii) Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

$1 \in A$ $\quad 4 \notin A \quad \frac{9}{2} \in A$

$3{,}5 \in A \quad 10 \in A \quad 3 \in A$

3) Escribe por comprensión los siguientes conjuntos:
 i) $A = \{\text{Brasil, Argentina}\}$
 ii) $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
 iii) $C = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
4) Escribe por extensión los siguientes conjuntos:
 i) $D = \{x \,/\, x \text{ es componente químico del agua}\}$
 ii) $E = \{x \,/\, x = 3n,\ n \in \mathbb{N},\ 5 \leq n \leq 8\}$
 iii) $F = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, (x^2 - \frac{1}{9})(x^2 - 2) = 0\}$

Igualdad de conjuntos

Definición

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
Simbólicamente: $A = B \Leftrightarrow \forall x, ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$

[1] Osin, L. (1975). *Introducción al análisis matemático*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz. (p. 3)

Profa. Mónica Olave – Profa. Cristina Ochoviet – Prof. Gustavo Franco
También colaboró en la elaboración de este material: Profa. Ana Tosetti

Actividad

Completa con: $\neq$ o $=$

$\{2, -1, 5\}$ ...... $\{x \in \mathbb{R} \,/\, (x+1)(x-2)(x-5) = 0\}$

$[2, 3]$ .... $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < x \leq 3\}$

$\{x \in \mathbb{R} \,/\, (x - \frac{1}{2})(x+9) \leq 0\}$ .... $[-9, \frac{1}{2}]$

«$A = B$» ([1]) y «$\forall x$, $((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$» ([2]), son lo que se denominan ***proposiciones***. Es decir, oraciones que son verdaderas (V) o falsas (F), pero no ambas cosas a la vez. Si una proposición es verdadera, diremos que su ***valor de verdad*** es V, y si es falsa diremos que su *valor de verdad* es F.

Las proposiciones pueden clasificarse en ***simples*** o ***compuestas.*** Las proposiciones compuestas están formadas por proposiciones simples. Por ejemplo, una proposición simple sería "Pablo lee el Quijote" y en cambio una proposición compuesta podría ser "Pablo lee *el Quijote* y *Cien años de soledad*". A las proposiciones las representaremos utilizando letras minúsculas de nuestro alfabeto: *p*, *q*, *r*,...

Las proposiciones ([1]) y ([2]) se llaman ***equivalentes***. Dos proposiciones son equivalentes (y lo notaremos con el símbolo "$\Leftrightarrow$"), cuando tienen los mismos valores de verdad.

En la proposición ([2]) aparece el llamado *cuantificador universal* ($\forall$), y las *operaciones básicas*: *conjunción* ($\wedge$) e *implicación* ($\rightarrow$). Las definiciones de estas operaciones vienen dadas por las siguientes tablas, que nos permiten determinar el valor de verdad de una proposición compuesta en función de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Si p y q son dos proposiciones, a la proposición $p \wedge q$, que se lee «p y q», se la denomina **conjunción lógica** de p y q. La proposición $p \wedge q$ es verdadera únicamente cuando p y q son verdaderas, lo que está de acuerdo con el uso corriente de la conjunción «y»[2].

Si p y q son dos proposiciones, a la proposición $p \rightarrow q$, que se lee «p implica q», se la denomina **condicional** o **implicación lógica** de las proposiciones p y q (en ese orden). También se dice que p es el *antecedente* del condicional y que q, es el *consecuente*.

---

[2] Aunque el uso coloquial de la conjunción «y», no siempre es claro y libre de ambigüedades. Por más información al respecto se puede consultar: Bosch, J. (1965). *Introducción al simbolismo lógico*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires. (p. 9)

Se podría pensar que carece de sentido que la proposición «$p \rightarrow q$» sea verdadera cuando p y q son falsas, pero consideremos la siguiente proposición matemática:

$$\forall n,\ n \in \mathbb{Z},\ (n > 2 \rightarrow n^2 > 4)$$

Cabe esperar que la proposición anterior sea verdadera. Al sustituir n por diferentes números enteros en las expresiones «$n > 2$» y «$n^2 > 4$», se obtienen distintas proposiciones y se dan todas las posibles combinaciones de valores de verdad, exceptuando la combinación V-F. Por ejemplo, tomando n como 3, -3 y 1, resultan respectivamente las combinaciones V-V, F-V y F-F, y todas estas combinaciones dan a la implicación el valor de verdad esperable (V)[3].

Inclusión. Subconjuntos.

Actividades

1) Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}$:

i) $x^2 - x = 0$ $\qquad S_1 =$

ii) $x^2 - \pi \leq 0$ $\qquad S_2 =$

iii) $x\,(2x - 1)\,(x - 4) = 0$ $\qquad S_3 =$

iv) $x - 5 = x + 6$ $\qquad S_4 =$

Definición

Se dice que un conjunto A está *incluido ampliamente* en un conjunto B, o que A es *subconjunto* de B, y se escribe $A \subseteq B$, si todo elemento de A es también elemento de B.
Simbólicamente: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x,\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

Observa que: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

Cuando queremos distinguir expresamente que no se cumple la igualdad, o sea cuando: $A \subseteq B$ y $A \neq B$, decimos que A está *incluido estrictamente* en B, o que A es *subconjunto propio* de B y escribimos: $A \subset B$. Esto implica que todo elemento de A pertenece a B, pero hay elementos de B que no pertenecen a A.

2) Indica si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas, justificando en cada caso:

$S_1 \subset S_2$

$S_3 \subseteq S_2$

$S_3 \subseteq S_3$

$S_1 \not\subset \mathbb{Z}$

$S_2 \subseteq \mathbb{R}$

$S_3 \not\subset \mathbb{Q}$

$S_4 \subset S_1$

[3] Por más consideraciones acerca de la tabla de verdad de la implicación se pueden consultar desde la página 42 a la 45 del libro: González Cabillón, J. (1993). *Matemática. 5º año.* Tomo I. Montevideo: Colección Cánepa.

Observa que todo conjunto es subconjunto de sí mismo: $A \subseteq A$
Analicemos ahora desde el punto de vista lógico, la definición de inclusión amplia. Como las proposiciones «$A \subseteq B$» (^{1}) y «$\forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$» (^{2}) son equivalentes, para que la proposición (^{1}) sea verdadera (es decir para que A esté incluido en B) la proposición (^{2}) debe ser verdadera. Como la proposición «$\forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$» es compuesta, su valor de verdad depende de los valores de verdad de las proposiciones simples: «$x \in A$» y «$x \in B$» (cualquiera sea x). Según la tabla de verdad de la implicación, tenemos que:

1) si «$x \in A$» y «$x \in B$» (cualquiera sea x) son ambas verdaderas, la proposición: «$\forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$» también lo es, con lo cual «$A \subseteq B$» es verdadera (ya que las proposiciones (^{1}) y (^{2}) son equivalentes).
2) si «$x \in A$» y «$x \in B$» (cualquiera sea x), son ambas falsas es decir, si x no es un elemento de A y x no es un elemento de B, entonces la proposición: «$\forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$» es verdadera, y por lo tanto A está incluido en B.
3) si «$x \in A$» es falsa y «$x \in B$» es verdadera (cualquiera sea x), entonces la proposición: «$\forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$» es verdadera, y por lo tanto A está incluido en B.
4) si «$x \in A$» es verdadera y «$x \in B$» es falsa (para algún x), entonces la proposición: «$\forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$» es falsa y por lo tanto A no está incluido en B.

En conclusión, A no está incluido en B, únicamente cuando existe un elemento x que pertenece a A y ese elemento x no pertenece a B.
Simbólicamente: $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x, (x \in A \wedge x \notin B)$.

Consideraremos que la proposición «$x \notin B$» (para algún x), es la *negación* de la proposición «$x \in B$». Si la proposición «$x \in B$» (para algún x) es verdadera, la proposición «$x \notin B$», es falsa y, por el contrario, si «$x \in B$» (para algún x) es falsa, la proposición «$x \notin B$», es verdadera.
En general, si p es una proposición, la proposición $\neg p$, que se lee « no p », se denomina **negación** de la proposición p.
La tabla de verdad de la negación es la siguiente:

p	$\neg p$
V	F
F	V

En la proposición «$\exists x, (x \in A \wedge x \notin B)$»[4] aparece el llamado cuantificador existencial ($\exists$). El cuantificador universal ($\forall$) y el cuantificado existencial ($\exists$) se vinculan, por ejemplo, de la siguiente manera: sea $P(x)$ una expresión[5] que depende de x, la proposición, «$\forall x, (\neg P(x))$»[6] es equivalente a la proposición «$\neg ((\exists x), P(x))$».

[4] Cuando se dice «existe x», significa que «existe, por lo menos, un x».
[5] Con este tipo de expresiones trabajaremos más adelante cuando veamos *funciones proposicionales*.

"***Profesor:*** ... decir que la proposición

$$\forall x, (\neg P(x))$$

es verdadera significa que la proposición

$$\exists x, P(x)$$ [7]

es falsa.
Por ejemplo: si es cierto que

Todo alumno entiende los cuantificadores

entonces decir que

Existen alumnos que no entienden los cuantificadores

es falso. Es claro, ¿no?...
[...]
Juan: ¡Ah! Pero, yo pensaba que la *negación* de

Todas sus explicaciones son claras

era

Ninguna de sus explicaciones es clara

pero veo que estaba en un error. Debo decir:

Algunas de sus explicaciones no son claras

Profesor: Muy buen ejemplo, Juan. Y gracias por tu sinceridad...

Ahora bien, el *cuantificador universal* «$\forall$» puede asimilarse, intuitivamente, a expresiones que indican universalidad (en alemán, *Algemanheit*, de donde proviene el símbolo «$\forall$»: una «*A*» invertida). El carácter universal de una proposición del lenguaje cotidiano se obtiene, usualmente, anteponiendo al sujeto la palabra *todo* (en inglés, «All», lo que ha generalizado la notación «$\forall$»)..."[8]

Conjunto Vacío

Puede suceder que ningún elemento satisfaga la condición de pertenencia (por ejemplo: «conjunto de todos los triángulos de cuatro lados»)
Nos encontramos entonces con un conjunto particular que llamaremos vacío.

Una posible **definición** del conjunto vacío podría ser: $\{x \in A \ / \ x \neq x\}$

Su notación será: $\varnothing$[9] y podemos escribir también: $\varnothing = \{\ \}$.

---

[6] Se lee: «Para todo x, se verifica $\neg P(x)$»

[7] Se lee «existe x tal que se verifica $P(x)$»

[8] González Cabillón, J. (1993). *Matemática. 5º año*. Tomo I. Montevideo: Colección Cánepa. (pp. 79-80).
Nota: Se han realizado modificaciones al texto original para que la cita guarde coherencia con el curso.

[9] "Este símbolo corresponde a letra «o» escandinava y pretende ser una modificación del número cero, con el cual –como veremos- se presentan analogías evidentes. Su aparición en la Matemática es de fecha más bien reciente, comenzando su popularidad a principios de la década del 50." Op. Cit., pie de pág. 111.

Observa que: 1) Cualquiera sea el conjunto A, se cumple que $\varnothing \subseteq A$.
2) $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

Una posible justificación de la observación 1: $\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x, (x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$.

Como el antecedente de la proposición «$\forall x, (x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$» es falso, dicha proposición, según las tablas de verdad de la implicación, es verdadera. Por lo tanto, la proposición «$\varnothing \subseteq A$» es también verdadera, ya que es equivalente a «$\forall x, (x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$».

Actividad

Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

1) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
2) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
3) $\varnothing \not\subseteq \{\varnothing\}$
4) $\varnothing \subseteq \varnothing$
5) $\varnothing \in \varnothing$

Conjunto de Partes o Conjunto Potencia

Definición

Dado un conjunto A, se llama *conjunto de partes de A* o *conjunto potencia* de A, y se escribe $\mathcal{P}(A)$, al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.
Simbólicamente: $\mathcal{P}(A) = \{X \,/\, X \subseteq A\}$

Actividades

1) Sea $A = \{1, 2, 3\}$, escribe $\mathcal{P}(A)$.
   Sea $B = \{1, 2\}$, escribe $\mathcal{P}(B)$.
   Sea $C = \{3\}$, escribe $\mathcal{P}(C)$.
2) Completa: Si un conjunto E tiene n elementos, el conjunto $\mathcal{P}(E)$ tiene .... elementos.
3) El conjunto de partes de A, ¿puede ser vacío? Justifica.

Operaciones entre conjuntos

Unión de conjuntos

Actividades

Resuelve las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$ y escribe el conjunto solución utilizando intervalos de números reales:

i) $\dfrac{3-x^2}{x^2+1} < 0$

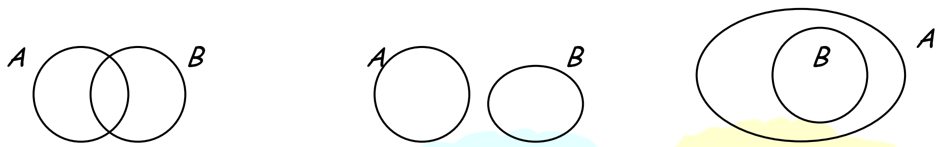
ii) $(-x-3)x^2(x-4) > 0$

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Se llama *unión* de A y B, y se escribe $A \cup B$, a un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen a A o a B.
Simbólicamente: $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

Actividad

Dados los siguientes conjuntos mediante diagramas de Venn, raya el conjunto $A \cup B$:



En la fórmula: «$x \in A \vee x \in B$», aparece la operación básica llamada *disyunción* ($\vee$). La definición de esta operación viene dada por la siguiente tabla:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Si p y q son dos proposiciones, a la proposición $p \vee q$, que se lee «p o q», se la denomina **disyunción lógica** de p y q.[10]

Analicemos ahora, desde el punto de vista lógico, la definición de conjunto unión. Según dicha definición, las proposiciones «$x \in A \cup B$» $(^1)$ y «$x \in A \vee x \in B$» $(^2)$ (cualquiera sea x), son equivalentes. Mirando la tabla de verdad de la disyunción, vemos que la proposición $(^2)$ es verdadera si:

1) «$x \in A$» es verdadera y «$x \in B$» es verdadera.
2) «$x \in A$» es falsa y «$x \in B$» es verdadera.
3) «$x \in A$» es verdadera y «$x \in B$» es falsa.

Será falsa únicamente cuando «$x \in A$» y «$x \in B$» (para algún x) sean ambas falsas a la vez.

Por ejemplo, consideremos los conjuntos $A = \{2, 5\}$ y $B = \{1, 2\}$, y teniendo en cuenta el análisis realizado anteriormente, hallemos $A \cup B$.

- ¿$1 \in A \cup B$?

[10] En la pág. 37 del libro: González Cabillón, J. (1993). *Matemática. 5º año*. Tomo I. Montevideo: Colección Cánepa, se realizan consideraciones que vinculan el símbolo «$\vee$» con la conjunción «o» de nuestro idioma.

Sí, puesto que la proposición «$1 \in A$» es falsa y la proposición «$1 \in B$» es verdadera; con lo cual la proposición «$1 \in A \vee 1 \in B$» es verdadera, y como son equivalentes, «$1 \in A \cup B$» también es verdadera.

- ¿$2 \in A \cup B$?

  Sí, puesto que la proposición «$2 \in A$» es verdadera y la proposición «$2 \in B$» es verdadera; con lo cual la proposición «$2 \in A \vee 2 \in B$» es verdadera, y como son equivalentes, «$2 \in A \cup B$» también es verdadera.

- ¿$5 \in A \cup B$?

  Sí, puesto que la proposición «$5 \in A$» es verdadera y la proposición «$5 \in B$» es falsa; con lo cual la proposición «$5 \in A \vee 5 \in B$» es verdadera, y como son equivalentes, «$5 \in A \cup B$» también es verdadera.

- ¿$7 \in A \cup B$?

  No, puesto que la proposición «$7 \in A$» es falsa y la proposición «$7 \in B$» es falsa; con lo cual la proposición «$7 \in A \vee 7 \in B$» es falsa, y como son equivalentes, «$7 \in A \cup B$» también es falsa. Lo mismo sucede para cualquier x que no sea ni 1, ni 2, ni 5.

Por lo tanto: $A \cup B = \{1, 2, 5\}$

Actividad

1) Comprueba, utilizando las tablas de verdad, que:

   a) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (Definición del condicional)

   b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (Ley de De Morgan)

   c) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ (Doble negación)

2) Utilizando proposiciones equivalentes, justifica que la negación de la proposición: «$\forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$» (definición de $A \subseteq B$) es la proposición: «$\exists x, (x \in A \wedge x \notin B)$» (definición de $A \nsubseteq B$).

Algunas definiciones:

1) Una proposición es una **tautología** si y sólo si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad de sus proposiciones componentes.
2) Una proposición es una **contradicción** si y sólo si es falsa para todas las asignaciones de valores de verdad de sus proposiciones componentes.
3) Una proposición es una **contingencia** si y sólo si no es una tautología ni una contradicción.

Actividades

1) Estudia, utilizando las tablas de verdad, si las siguientes proposiciones son tautología, contradicción o contingencia:

   a) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

   b) $(p \wedge (\neg p))$

   c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

2) Prueba, utilizando las tablas de verdad, que las siguientes proposiciones son tautologías:

i) $((p \to q) \wedge p) \to q$ (*Modus Ponens*)

ii) $((p \to q) \wedge (\neg q)) \to \neg p$ (*Modus Tollens*)

iii) $p \to p$ (Identidad)

iv) $(p \wedge q) \to p$ (Simplificación)

v) $p \to (p \vee q)$ (Adición)

vi) $((p \vee q) \wedge (\neg p)) \to q$ (Silogismo disyuntivo)

vii) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ (Silogismo hipotético)

A las tautologías de la actividad 2, se las denomina *reglas lógicas*.

Definición

Llamaremos **regla lógica** a toda implicación que sea una tautología.

Definición

Si $p \to q$ es una tautología, escribiremos $p \Rightarrow q$, que se lee: «si p, entonces q».

Propiedades de la operación Unión

1) $A \cup A = A$ (Idempotencia)
2) $A \cup B = B \cup A$ (Conmutativa)
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Asociativa)
4) $A \cup \varnothing = A$ (Existencia del elemento neutro)
5) $A \subseteq A \cup B$
6) $B \subseteq A \leftrightarrow A \cup B = A$

En la propiedad 6, aparece una operación básica más. La definición de esta operación viene dada por la siguiente tabla:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Si p y q son dos proposiciones, a la proposición $p \leftrightarrow q$, que se lee «p implica doblemente a q», se la denomina ***bicondicional*** de las proposiciones p y q.[11]

[11] Los símbolos: $\wedge$, $\to$, $\neg$, $\vee$, $\leftrightarrow$, se llaman ***conectivos lógicos***.

Definición

Si la proposición $p \leftrightarrow q$ es una tautología, escribiremos $p \Leftrightarrow q$, que se lee «*p* si y sólo si *q*» o «*p* es equivalente a *q*», y a dicha proposición la denominaremos ***ley lógica***.

Actividad

Prueba que las siguientes proposiciones son leyes lógicas:

a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

b) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

c) $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$

También se cumplen las siguientes equivalencias:

1) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ Idempotencia de la disyunción.

2) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ Idempotencia de la conjunción.

3) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ Conmutativa de la disyunción.

4) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ Conmutativa de la conjunción.

5) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ Asociativa de la disyunción.

6) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ Asociativa de la conjunción.

7) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ Distributiva de la conjunción respecto de la disyunción.

8) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ Distributiva de la disyunción respecto de la conjunción.

9) $p \vee \neg p \Leftrightarrow t$, siendo t una tautología. Tercero Excluido.

10) $p \wedge \neg p \Leftrightarrow c$, siendo c una contradicción.

11) $p \vee t \Leftrightarrow t$, siendo t una tautología.

12) $p \wedge t \Leftrightarrow p$

13) $p \vee c \Leftrightarrow p$

14) $p \wedge c \Leftrightarrow c$, siendo c una contradicción.

15) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ Ley de De Morgan.

16) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ Ley de De Morgan.

Actividad

Demuestra las propiedades de la unión de conjuntos enunciadas más arriba.

Actividad

Comprueba que las proposiciones «$p \leftrightarrow q$» y «$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$», son equivalentes[12].

"***Silvia:*** [$p \leftrightarrow q$] ¡Es como si fueran dos condicionales! ¿No, Profesor…?

Profesor: ¡Y, sí!... En la proposición anterior, se indican, el condicional

$$p \rightarrow q$$ [13]

al que se suele llamar **directo**, y su **recíproco**

$$q \rightarrow p$$

¡El *bicondicional* es la *conjunción* de ambos!

La proposición *directa* expresa que p es **suficiente** para que se cumpla q, la *recíproca* establece que p es **necesario** para que se cumpla q. Si ambas proposiciones son verdaderas, es decir, tanto la directa como la recíproca son teoremas, diremos que las proposiciones p y q son **equivalentes** y también, que p es **condición necesaria y suficiente** para que se cumpla q.

Laura: ¿Algún ejemplito?...

Profesor: Durante el curso nos encontraremos con varios ejemplos. Ahora, veamos uno muy simple que seguramente aclarará las ideas:

Una condición necesaria –pero no suficiente- para que un triángulo sea equilátero es que sea un triángulo isósceles.

Es decir, para que un triángulo sea equilátero es necesario que sea isósceles, pero –como sabemos- esto no alcanza, pues, los *tres* lados deben ser iguales.

Una condición suficiente –pero no necesaria- para que un triángulo sea isósceles es que sea un triángulo equilátero.

Es decir, para que un triángulo sea isósceles basta que sea equilátero, pero –como sabemos- esto no es imprescindible, pues, tendríamos más que lo que realmente necesitamos.

Alfredo: ¿Y algún ejemplo de *condición necesaria y suficiente*?...

Profesor: Pasemos, ahora, a los números:

- n es múltiplo de 3 implica que la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- La suma de las cifras de n es múltiplo de 3 implica que n es múltiplo de 3.

Decimos, pues, que la condición «la suma de las cifras de n es múltiplo de 3» es una *condición necesaria y suficiente* para que n sea múltiplo de 3."[14]

---

[12] Esta equivalencia es la definición del bicondicional.

[13] Los condicionales «$\neg p \rightarrow \neg q$» y «$\neg q \rightarrow \neg p$», se llaman, respectivamente, ***contrario*** y ***contrarecíproco*** del condicional «$p \rightarrow q$», al que se lo llama ***directo***.

[14] González Cabillón, J. (1993). *Matemática. 5º año.* Tomo I. Montevideo: Colección Cánepa. (pp. 46-47). Nota: Se han realizado modificaciones al texto original para que la cita guarde coherencia con el curso.

Según lo anterior, la propiedad 6 se puede expresar: «$B \subseteq A$» es condición necesaria y suficiente para que se cumpla que «$A \cup B = A$».

Demostraremos, antes de pasar a otra operación entre conjuntos, la propiedad 5 de la operación unión: $A \subseteq A \cup B$, prestando especial atención a los aspectos lógicos de la prueba.

$\forall x,\ x \in A \underset{(1)}{\Rightarrow} \forall x,\ (x \in A \vee x \in B) \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \forall x,\ (x \in A \cup B)$.

Por lo tanto, aplicando la regla lógica *silogismo hipotético*[15], tenemos que:

$$(\forall x,\ x \in A \rightarrow \forall x,\ (x \in A \cup B)) \underset{(3)}{\Leftrightarrow} A \subseteq A \cup B$$

(1) Se utilizó la regla lógica *adición*: $p \rightarrow (p \vee q)$ y la definición de «$\Rightarrow$».
(2) Definición de la operación unión.
(3) Definición de inclusión.

Actividad

Comprueba, utilizando tablas de verdad, que:
1) $\neg q \rightarrow \neg p$ es equivalente a $p \rightarrow q$ (el condicional contrarecíproco es equivalente al directo).
2) $\neg p \rightarrow \neg q$ no es equivalente a $p \rightarrow q$ (el condicional contrario no es equivalente al directo).
3) $p \rightarrow q$ es equivalente a $(p \wedge \neg q) \rightarrow c$, siendo c una contradicción.

En la parte 1) de la actividad anterior has probado que la proposición «$(\neg q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$», es una ley lógica, y se llama ***transposición***. Esta ley es la que justifica que, en muchas ocasiones, en vez de demostrarse la proposición directa, se demuestre, debido a que resulta más fácil, su contrarecíproca.
Por ejemplo, en virtud de la ley de transposición, demostrar la proposición: «$\forall x,\ x \in \mathbb{N},\ \forall y,\ y \in \mathbb{N},\ (x \neq y \rightarrow 2x \neq 2y)$», es equivalente a demostrar: «$\forall x,\ x \in \mathbb{N},\ \forall y,\ y \in \mathbb{N},\ (2x = 2y \rightarrow x = y)$».
Muchas veces se confunde la demostración del contrarecíproco, con la ***demostración por el absurdo***, cuyo sustento lógico es la ley que probaste en la parte 3) de la actividad anterior: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \rightarrow c]$, siendo c una contradicción. Ya tendremos oportunidad de trabajar más adelante con ambos mecanismos de demostración.

Intersección de conjuntos

Actividad

Resuelve en $\mathbb{R}$ el siguiente sistema: $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x^2+2} > 0 \\ x-7 < 0 \end{cases}$

---

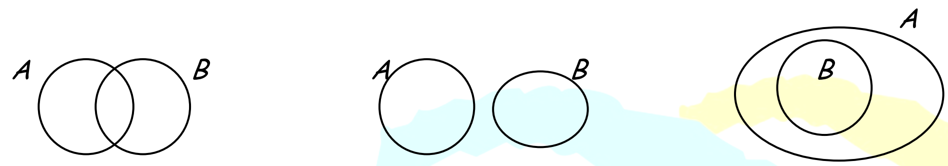
15 Un análisis más minucioso nos mostraría que en este paso también se ha aplicado que «$p \leftrightarrow q$» es equivalente a «$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$» y la regla lógica *simplificación*.

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Se llama *intersección* de A y B, y se escribe $A \cap B$, a un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.
Simbólicamente: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

Actividad

Dados los siguientes conjuntos mediante diagramas de Venn, raya el conjunto $A \cap B$.



Analicemos desde el punto de vista lógico la definición de intersección de conjuntos. Teniendo en cuenta dicha definición, las proposiciones «$x \in A \cap B$» ([1]) y «$x \in A \wedge x \in B$» ([2]) (cualquiera sea x) son equivalentes. Según la tabla de verdad de la conjunción, la proposición ([2]) será verdadera únicamente cuando las proposiciones simples «$x \in A$» y «$x \in B$» (cualquiera sea x), sean ambas verdaderas a la vez; en todos los demás casos será falsa.

Por ejemplo, consideremos los conjuntos $A = \{2, 5\}$ y $B = \{1, 2\}$, y teniendo en cuenta el análisis realizado anteriormente, hallemos $A \cap B$.

- ¿$1 \in A \cap B$?
  No, pues la proposición «$1 \in A$» es falsa y la proposición «$1 \in B$» es verdadera, con lo cual la proposición «$1 \in A \wedge 1 \in B$» es falsa, y como son equivalentes, es falsa también la proposición «$1 \in A \cap B$»; por lo tanto «$1 \notin A \cap B$» es verdadera.
- ¿$2 \in A \cap B$?
  Sí, pues las proposiciones «$2 \in A$» y «$2 \in B$», son ambas verdaderas a la vez, entonces es verdadera la proposición «$2 \in A \wedge 2 \in B$» y por lo tanto, como son equivalentes, también es verdadera la proposición «$2 \in A \cap B$».
- ¿$5 \in A \cap B$?
  No, el razonamiento es análogo al que realizamos para justificar que $1 \notin A \cap B$. Lo mismo sucede con cualquier otro x que no sea 2.

Por lo tanto: $A \cap B = \{2\}$.[16]

[16] A un conjunto con un sólo elemento se le llama ***unitario***.

Propiedades de la operación Intersección

1) $A \cap A = A$ (Idempotencia)

2) $A \cap B = B \cap A$ (Conmutativa)

3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Asociativa)

4) $A \cap \varnothing = \varnothing$ (Absorción)

5) $A \cap B \subseteq A$

6) $B \subseteq A \leftrightarrow A \cap B = B$

Actividad

Demuestra las propiedades anteriores.

Diferencia de conjuntos

Actividad

Escribe el conjunto de todos los números reales x de modo que $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x - 5}$ sea un número real.

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Se llama *diferencia* de A y B, y se escribe $A - B$, a un nuevo conjunto que tiene por elementos los que pertenecen a A y que <u>no</u> pertenecen a B.
Simbólicamente: $A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

Propiedades de la operación Diferencia

1) $A - A = \varnothing$

2) $A - \varnothing = A$

3) $\varnothing - A = \varnothing$

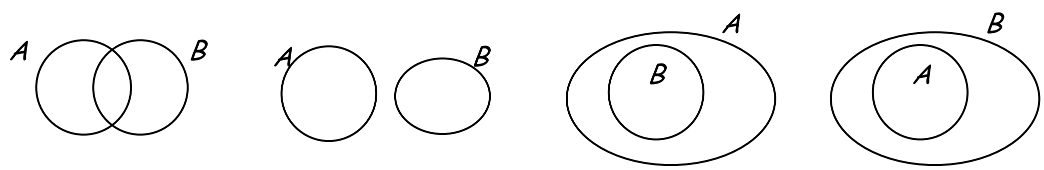
4) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$

Actividad

Demuestra las propiedades anteriores.

Actividad

Dados los siguientes conjuntos mediante diagramas de Venn, raya el conjunto $A - B$.



Complementación

Actividad

Resuelve las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$. Escribe el conjunto solución para cada caso.

i) $(x^2+5)(2x+7)\geq 0$ $\quad S_1 =$...

ii) $(x^2+5)(2x+7)< 0$ $\quad S_2 =$...

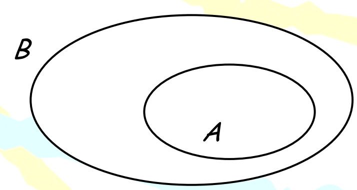
iii) Completa: $S_1 \cap S_2 =$ ....

$S_1 \cup S_2 =$................................

Definición

Sean los conjuntos A y B tal que $A \subseteq B$. Se llama *complemento* de A con respecto a B, y se escribe $A_B^c, A_B^{'}$ o $\bar{A}_B$, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a B y que <u>no</u> pertenecen a A.
Simbólicamente: $A_B^c = \{x \,/\, x \in B \wedge x \notin A\}$

Actividades



1) Raya en la figura el conjunto A_B^c.

2) Completa:

- $\left(A_B^c\right)^c =$...........
- $A \cup A_B^c =$...........
- $A \cap A_B^c =$...........

3) Dados los conjuntos: $A=\{a, b, c, d, e\}$ $\quad B=\{a, c, d, f, g\}$ $\quad C=\{a, b, c, d, e, f, g\}$
$D=\{a, c, d\}$ $\quad E=\{b, e\}$ $\quad F=\{f, g\}$

a) Completa usando los símbolos de intersección, diferencia y unión:
i) A .... $B=C$ $\quad$ ii) A .... $B=E$ $\quad$ iii) A .... $B=D$ $\quad$ iv) B .... $A=F$

b) Determina $B\cup D$, $\;B\cap D$, $\;B-D$, $\;E\cap F$, $\;A_C^c$, $\;B_C^c$, $\;\wp(D)$, $\;C-B\;$ y $\;B-C$.

c) Indica, justificando, si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F):
i) $\{a, b\}\subseteq A$ $\quad$ ii) $\{a, b\}\subset C$ $\quad$ iii) $D\subseteq A\cap B$ $\quad$ iv) $B\subseteq C$
v) $\{a, b\}\in A$ $\quad$ vi) $C\subseteq E$ $\quad$ vii) $A\cup B\subset C$ $\quad$ viii) $a\in D$
ix) $a\subseteq D$

d) Demuestra las siguientes igualdades:

i) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Propiedad distributiva de la unión con respecto a la intersección)

ii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Propiedad distributiva de la intersección con respecto a la unión)

iii) $\left(A \cup B\right)_C^c = A_C^c \cap B_C^c$ (Ley de De Morgan)

iv) $\left(A \cap B\right)_C^c = A_C^c \cup B_C^c$ (Ley de De Morgan[17])

Par Ordenado

"***Profesor:*** Creo que ha llegado el momento de considerar un concepto particularmente importante con el cual ustedes ya están familiarizados. Me refiero, concretamente, al concepto de **par ordenado**. ¿Lo recuerdan?...
[...]

> Si a y b designan dos objetos matemáticos cualesquiera, el **par ordenado** asociado con a y b, se representa mediante el símbolo
>
> $$(a, b)$$
>
> donde a y b se denominan, respectivamente, **primer componente** y **segundo componente** del *par ordenado*.

[...]
***Ana** (interrumpiendo):* ¡Profesor! ¿No bastaría decir que

Un par ordenado es un par de elementos escritos en un orden definido?

Juan: Ana... ¿Cómo podés escribir un par de elementos, *sin* escribirlos en un orden definido? ¡En el *espacio* es imposible, y en el *tiempo*, también!...

Profesor: Sí, sí. Además, el «orden» mencionado por Ana no es un concepto que matemáticamente hayamos presentado oficialmente en sociedad. El adjetivo «ordenado» que venimos empleando para los pares, tiene un carácter gramatical, y no matemático. Dicho adjetivo pretende recordarnos que

$$(a, b) \neq (b, a)$$

a menos –claro está- que a y b sean iguales.

---

[17] "***Augustus de Morgan*** (1806-1871) Matemático inglés. En 1858, demostró las dos igualdades mencionadas, hoy conocidas universalmente como **leyes de *De Morgan***. Estas fórmulas –en forma equivalente- ya habían sido introducidas por los escolásticos con escasa repercusión."
González Cabillón, J. (1993). *Matemática. 5° año*. Tomo I. Montevideo: Colección Cánepa. (pie de pág. 133)

Por lo tanto, tenemos que esforzarnos un poco más en lograr una *definición* de par ordenado que satisfaga nuestra curiosidad conjuntista. Es decir, para cada par de elementos a y b deseamos construir un nuevo conjunto, simbolizado (a, b) que posea la *propiedad fundamental:*

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow (a = c \wedge b = d)$$

[...] Intentemos, pues, dar una definición conjuntista...
Obviamente, no podríamos definir

$$(a, b)$$

como

$$\{a, b\}$$

puesto que

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

y no se cumpliría la propiedad fundamental...
Pero... ¿cómo dar una definición razonable de (a, b)? ¡No es fácil!

> DEFINICIÓN
> El par ordenado asociado con los elementos a y b (*sotto voce:* ¡en ese orden!) es el conjunto (a, b) definido por
>
> $$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Observen que

$$(a, b)$$

es, de acuerdo con esta definición, un conjunto binario cuyos elementos son los conjuntos

$$\{a\} \quad \text{y} \quad \{a, b\}$$

Tal definición es, sin dudas, extravagante y no intuitiva, pero como veremos, resulta adecuada para demostrar el siguiente

> TEOREMA (*Propiedad fundamental de los pares ordenados*)
>
> Sean a, b, c, y d elementos cualesquiera. Se cumple:
>
> $$(a, b) = (c, d) \Rightarrow (a = c \wedge b = d)$$

Demostración:"[18]

[18] González Cabillón, J. (1993). *Matemática. 5º año.* Tomo I. Montevideo: Colección Cánepa. (pp. 138 a 140).
Notas: 1) Se han realizado modificaciones al texto original para que la cita guarde coherencia con el curso.
2) El alumno interesado puede leer la demostración del teorema en las páginas 140 a 142.

Terna Ordenada

"El concepto de *par ordenado* puede generalizarse fácilmente al de ***terna ordenada***. Del mismo modo que los *pares ordenados* hallan una interpretación geométrica sencilla e interesante mediante las coordenadas de un punto del plano (dos dimensiones), las *ternas ordenadas* admiten también un modelo geométrico extremadamente útil: concretamente, las coordenadas de un punto en el espacio (tres dimensiones).

Para la definición de terna ordenada de objetos hemos de definir el símbolo

$$(a, b, c)$$

de suerte que

$$(a, b, c) = (d, e, f) \Rightarrow (a = d \wedge b = e \wedge c = f)$$[19]"

n-upla Ordenada

Análogamente, para la definición de n-upla ordenada asociada a los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se debe definir el símbolo

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

con la propiedad fundamental

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Rightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n)$$[20].

Producto Cartesiano

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Se llama *producto cartesiano* de A y B, y se escribe $A \times B$, a un nuevo conjunto formado por todos los pares ordenados tales que el primer componente del par pertenece al conjunto A y el segundo al conjunto B.
Simbólicamente: $A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$

Actividades

1) Se consideran los conjuntos E y H tales que: $E = \{1, 2\}$ y $H = \{a, b, c\}$
   Completa el producto cartesiano $H \times E$.
   $E \times H = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
   $H \times E = \{$.............
   ¿Se cumple la propiedad conmutativa del producto cartesiano?

---

[19] Op. Cit., p. 143.
[20] En la pág. 143 se puede consultar la definición de terna ordenada y en la pág. 144, la definición de *n*-upla ordenada.

2) Un alumno dice haber hallado el siguiente producto cartesiano:

$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 1), (c, 2)\}$

¿Puede ser correcto?

3) Dados los conjuntos: $A = \{5, 7\}$, $B = \{7, 9\}$ y $C = \{9, 10\ 11\}$; completa la siguiente tabla colocando $\in$ o $\notin$ según corresponda.

	$A \times B$	$B \times C$	$C \times A$	$A \times C$
(5, 7)				
(7, 9)				
(7, 7)				
(7, 5)				
(5, 9)				
(9,7)				
(9, 10)				

4) ¿En qué caso $A \times B$ es el conjunto vacío?

Relación

Definición

Se llama *relación* de A en B, y se escribe $R : A \to B$, a cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Simbólicamente: R es una relación de A en $B \Leftrightarrow R \subseteq A \times B$

Terminología

- Si R es una relación de A en B, y $(a, b) \in R$, diremos que a está relacionado con b y lo representaremos: $a \mathrm{R}\ b$ o $R(a) = b$.
- Habitualmente trabajaremos con relaciones de A en A a las que llamaremos, en forma más breve, ***relaciones definidas en A o relaciones en A***. Usualmente, en vez de escribir $R : A \to A$, se escribe $R : A$.

Función

Actividad

Se deja caer una pelota desde un edificio y se registra en la siguiente tabla la medida del espacio recorrido e, en metros, en función del tiempo t, en segundos:

t (segundos)	0	1	1,3	2	3	3,5	4
$e(t)$ (metros)	0	5	8,45	20	45	61,25	80

a) A partir de la tabla encuentra una fórmula ($e(t)$) para el espacio recorrido en función del tiempo. Indica dominio y posibles codominios para la función e.
b) Representa gráficamente e en función de t.
c) Representa gráficamente la función f cuya fórmula es la misma que la que obtuviste en la parte a), pero ahora con dominio $\mathbb{Z}$ y codominio $\mathbb{R}_0^+$ ($\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$).

Definición

Sean A y B dos conjuntos. Se dice que f es una función de A en B, y se escribe: $f : A \to B$, si y sólo si f es una relación de A en B que cumple que, <u>todo</u> elemento de A está relacionado con un <u>único</u> elemento de B.

Observación

$f : A \to B$ es función, significa:

- f es una relación de A en B: $f \subseteq A \times B$
- Existencia: $\forall x, x \in A, \exists y, y \in B, (x, y) \in f$
- Unicidad: $\forall x, x \in A, \forall y, y \in B, \forall z, z \in B\,(((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \to y = z)$

Terminología

Consideremos la función $f : A \to B$:

1) A se llama *dominio* de la función f, y se escribe $D(f)$

2) B se llama *codominio* de la función f, y se escribe $Cod(f)$

3) Si $y \in B$ está relacionado con $x \in A$, diremos que y es el correspondiente o la imagen de x, y que x es la preimagen de y; escribiremos $f(x) = y$.

Observa que para que una función quede definida es necesario indicar dominio, codominio y una cierta relación definida entre los elementos del dominio con los del codominio.

No confundir:

- f es la función, es decir, un conjunto de pares ordenados.
- $f(x)$ es la imagen de x al aplicar la función f, es decir, un elemento del condominio.

Representaciones de una función[21]

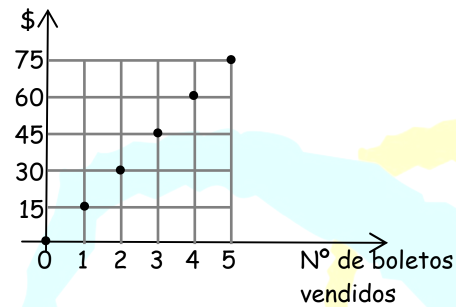
"Si el precio de un boleto de ómnibus es de $ 15, la función que relaciona el dinero recaudado con el número de boletos vendidos puede expresarse en varios lenguajes:

- **Lenguaje coloquial:** texto o frase que relaciona las dos variables. 'El dinero recaudado depende o es función del número de boletos vendidos'.
- **Lenguaje tabular:** tabla de valores que relaciona las dos variables.

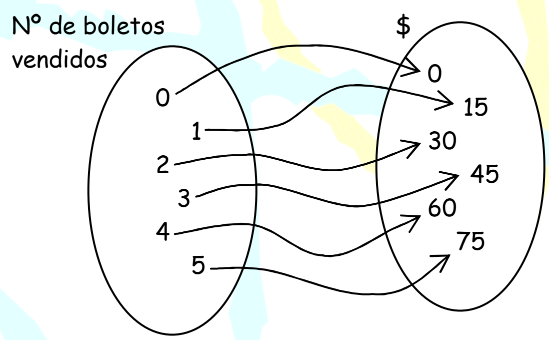
[21] Las siguientes representaciones se pueden utilizan para cualquier relación.

Nº de boletos	0	1	2	…	50	…
Pesos	0	15	30	…	750	…

- **Lenguaje analítico:** expresión analítica que relaciona las dos variables. Si x indica el número de boletos vendidos y el dinero recaudado en pesos lo expresamos con y, entonces la relación entre las dos variables viene dado por la expresión $y = 15.x$
- **Lenguaje gráfico:** gráfica que relaciona las dos variables. Una gráfica nos permite, entre otras cosas, observar globalmente el fenómeno."[22]



Otra posible forma de representar una función es a través de los llamados ***diagramas sagitales*** o ***diagramas de flechas***:



Definición

Sea $f: A \to B$

Se llama ***recorrido*** de la función f, y se escribe Rec(f), al conjunto de todas las imágenes.

Simbólicamente: $\text{Rec}(f) = \{ y \in B \,/\, \exists x, x \in A, f(x) = y \}$.

Clasificación de funciones: Función Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva

Definición

Una función $f: A \to B$ es *inyectiva* si y sólo si a todo par de elementos distintos del dominio les corresponden elementos distintos del codominio.

Simbólicamente: $f: A \to B$ inyectiva $\Leftrightarrow \forall x_1, x_1 \in A, \forall x_2, x_2 \in A, (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$

[22] Ochoviet, C. & Olave, M. (2006). *Matemática 4*. Montevideo: Santillana. (p. 80)

Actividad

La función e de la actividad anterior, ¿es inyectiva? ¿Y la función f? Justifica.

Definición

Una función $f: A \to B$ es *sobreyectiva* si el recorrido de la función es igual al codominio, o dicho de otro modo, si todo elemento del codominio tiene preimagen.
Simbólicamente: $f: A \to B$ sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{Rec}(f) = \text{Cod}(f)$
o también:
$f: A \to B$ sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall y, y \in B, \exists x, x \in A, f(x) = y$

Actividad

La función e de la actividad anterior, ¿es sobreyectiva?
Discute según que el codominio sea $\mathbb{R}_0^+$ o $\mathbb{R}$.
¿Y la función f? Justifica.

Definición

Una función es *biyectiva* si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

Actividad

La función e de la actividad anterior, ¿es biyectiva? Discute según que el codominio sea $\mathbb{R}_0^+$ o $\mathbb{R}$.

Función Inversa

Actividad

Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ h(x) = 2x - 3$

a) Completa:

x	-2	-1		1		3
y			-3		1	

b) Representa gráficamente h.
c) Demuestra que h es biyectiva.
d) Invierte los valores de la tabla (coloca los valores de la fila de la x en la fila de la y, y viceversa). Dicha tabla corresponde a una función afín g. Represéntala gráficamente en el mismo sistema de ejes cartesianos.
e) Halla la expresión analítica de g.
f) Representa, en el mismo sistema de ejes, la función $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ b(x) = x$. ¿Qué observas?

Definición

Dada una relación $f: A \to B$, se llama *relación inversa* de f, y se escribe f^{-1}, a la relación $f^{-1}: B \to A \ / \ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Teorema

$f: A \to B$ es una función biyectiva $\Leftrightarrow f^{-1}: B \to A$ es una función y es biyectiva.

Actividad

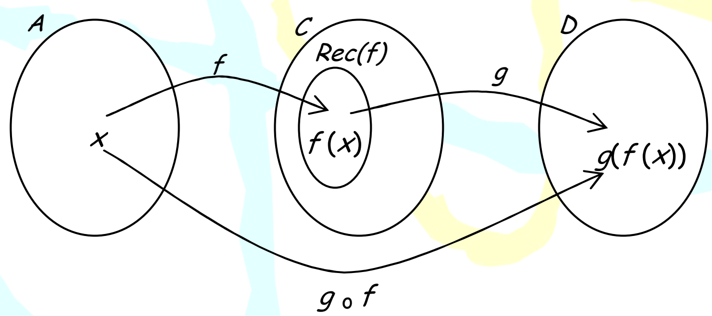
Demuestra el teorema anterior.

Observaciones

1) Por definición, $\forall x, x \in A, \forall y, y \in$ B, $f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$, por lo tanto, $\forall x, x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$.
2) A partir de la definición, $A'(y_0, x_0)$ es un punto de la gráfica de f^{-1} si y sólo si $A(x_0, y_0)$ es un punto de la gráfica de f. Los puntos A y A' son simétricos respecto a la recta que contiene a la bisectriz del primer cuadrante (si tomamos la misma unidad de medida en ambos ejes). Admitiremos que la gráfica de f y la gráfica de f^{-1} son simétricas respecto a la recta representación gráfica de la función $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / b(x) = x$.

Función compuesta

Dadas la funciones $f: A \to B$ y $g: C \to D$, tales que Rec(f) $\subseteq C$, se define la relación: $(g \circ f): A \to D / (g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Actividad

Demuestra que la relación definida anteriormente es una función, a la que llamaremos *función compuesta*.

Función Proposicional o Función Lógica

La expresión

P tal que $P(x)$: x es impar

no es una proposición, ya que a menos que especifiquemos quien es x no podremos decir nada acerca de su verdad o falsedad.
Sin embargo, para cada valor que le asignemos a x dicha expresión es una proposición; por ejemplo:

$P(5)$: 5 es impar es Verdadera
$P(4)$: 4 es impar es Falsa

A este tipo de expresiones las llamaremos *funciones proposicionales* o *funciones lógicas*.

Definición

P es una *función proposicional* definida en un conjunto *A* (no vacío), si y sólo si, *P* es una función de dominio *A* y codominio *B*, siendo *B* el conjunto de todas las proposiciones.

En otras palabras, *P* es una *función proposicional* definida en *A* (no vacío), si y sólo si, para todo *a* perteneciente a *A*, $P(a)$ es una proposición. Por lo tanto $P(a)$ puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez.

Ejemplo

P tal que $P(x)$: $\text{MCD}(x, 3) = 3$ definida en $\mathbb{N}$, es una función proposicional; en cambio *P* tal que $P(x)$: $\text{MCD}(x, 3) = 3$ definida en $\mathbb{R}$, no es una función proposicional.

Definición

Sea *P* una función proposicional definida en un conjunto *A* (no vacío). Se llama ***conjunto de validez*** de *P*, y se escribe V_P, al conjunto formado por los elementos pertenecientes a *A* que hacen que $P(x)$ sea verdadera.

Ejemplos

1) Sea P / $P(x)$: $x + 2 > x$, definida en $\mathbb{Z}$. El conjunto de validez de *P* es $V_P = \mathbb{Z}$

   En este caso diremos que es una *función proposicional verdadera*.

2) Sea P / $P(x)$: $x + 2 > 1$, definida en $\mathbb{Z}$. El conjunto de validez de *P* es $V_P = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x > -1\}$

3) Sea P / $P(x)$: $x + 2 < x$, definida en $\mathbb{Z}$. El conjunto de validez de *P* es $V_P = \varnothing$

   En este caso diremos que es una *función proposicional falsa*.

Cuantificación de funciones proposicionales

Retomemos la expresión

P tal que $P(x)$: *x* es impar, definida en $\mathbb{N}$

Hasta ahora hemos visto que esta expresión no es una proposición a menos que se le asignen valores específicos a *x*.
Pero si decimos:

Para todo *x*, se verifica $P(x)$ ([1])

y

Existe *x* tal que se verifica $P(x)$ ([2])

estas dos expresiones son proposiciones ya que podemos afirmar que ([1]) es falsa y que ([2]) es verdadera. Por lo tanto, una forma para transformar una función proposicional en una proposición es, como ya sabíamos, sustituyendo la variable por un elemento del dominio. Otra forma, es utilizando los cuantificadores universal ($\forall$) y existencial ($\exists$): *una función proposicional cuantificada pasa a ser una proposición*.

Definiciones

De modo similar a como definimos los conectivos lógicos ($\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\leftrightarrow$): indicando el valor de verdad de una proposición compuesta en función de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman, definiremos los cuantificadores en función del conjunto validez de la función proposicional a la que cuantifican:

Sea P una función proposicional definida en un conjunto A (no vacío):

1) $\forall x$, $P(x)$ es verdadera $\Leftrightarrow$ $V_P = A$.

2) $\forall x$, $P(x)$ es falsa $\Leftrightarrow$ $V_P \neq A$.

3) $\exists x$, $P(x)$ es verdadera $\Leftrightarrow$ $V_P \neq \varnothing$.

4) $\exists x$, $P(x)$ es falsa $\Leftrightarrow$ $V_P = \varnothing$.

Actividades[23]

1. Trata de agrupar entre las proposiciones siguientes aquellas que consideras equivalentes. Luego, escribe las respectivas negaciones.

(i) No todos los números primos son impares.
(ii) No todos los números primos son pares.
(iii) Todos los números primos son pares.
(iv) Todos los números primos son impares.
(v) Ningún número primo es par.
(vi) Ningún número primo es impar.
(vii) Hay, al menos, un número primo impar.
(viii) Hay, al menos, un número primo par.
(ix) Algún número primo no es impar.
(x) Algún número primo no es par.

2. Escribe la negación de cada una de las proposiciones que siguen:

(i) $\exists x$, $x \in \mathbb{N}$, $x + 1 = 0$

(ii) $\forall x$, $x \in \mathbb{Z}$, $x \,.\, 0 = 0$

(iii) $\exists x$, $x \in \mathbb{Q}$, $x + 1 = 1$

(iv) $\forall x$, $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Función Proposicional o Función Lógica de varias variables

También se pueden presentar funciones proposicionales en dos variables, por ejemplo:

P tal que $P(x, y)$: x es divisor de y, definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

[23] Extraídas de: González Cabillón, J. (1993). *Matemática. 5º año.* Tomo I. Montevideo: Colección Cánepa. (p. 83). Nota: se han realizado modificaciones al texto original para que la cita guarde coherencia con el curso.

Aunque especifiquemos que x e y pertenecen al conjunto de los números naturales, la expresión $P(x, y)$ no es una proposición, sin embargo si asignamos valores a x e y pasamos a obtener proposiciones:

$P(2, 6)$: 2 divide a 6 es Verdadera
$P(3, 7)$: 2 divide a 7 es Falsa

Definición

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos no vacíos. P es una *función proposicional* definida en $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ si y sólo si para toda n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ perteneciente a $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una proposición.

Definición

Sea P tal que $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función proposicional definida en $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ (siendo $A_1, A_2, \ldots, A_n$, conjuntos no vacíos). Se llama ***conjunto de validez*** de P, y se escribe V_P, al conjunto formado por todas las n-uplas pertenecientes a $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, que hacen que $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sea verdadera.

Cuantificadores múltiples

Consideremos la función proposicional de dos variables P definida en $A \times B$ (A y B son conjuntos no vacíos). Se puede transformar dicha función en una proposición cuantificándola de las siguientes formas:

- $\forall x, \exists y, P(x, y)$
- $\exists x, \forall y, P(x, y)$
- $\forall x, \forall y, P(x, y)$
- $\exists x, \exists y, P(x, y)$

Observa que $\forall x, P(x, y)$, no es una proposición, es la forma de una función proposicional definida en B.

Ejemplos

Consideremos la función proposicional $P(x, y)$: $x + y = y$, definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1) La proposición $\forall x, \exists y, x + y = y$ es falsa.
2) La proposición $\exists x, \forall y, x + y = y$ es verdadera.
3) La proposición $\forall x, \forall y, x + y = y$ es falsa.
4) La proposición $\exists x, \exists y, x + y = y$ es verdadera.

Teorema

$\forall x, \exists y, P(x, y)$ no es equivalente a $\exists x, \forall y, P(x, y)$

Actividad

Demuestra el teorema anterior.

Negación de cuantificadores múltiples

Veamos cómo podemos obtener la negación de la proposición: $\exists x, \forall y, P(x, y)$.
Consideremos $Q(x)$: $\forall y, P(x, y)$. Entonces tenemos que:
$\neg(\exists x, \forall y, P(x, y)) \Leftrightarrow \neg(\exists x, Q(x)) \Leftrightarrow \forall x, (\neg Q(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg(\forall y, P(x, y)) \Leftrightarrow \forall x, \exists y, (\neg P(x, y)$

Actividades[24]

1) Se considera el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y las siguientes funciones proposicionales:

$f(x, y)$: $x^2 \geq y + 1$, definida en $A \times A$

$g(x, y)$: $x^2 + y^2 \leq 12$, definida en $A \times A$

$h(x, y, z)$: $x^2 + y^2 \leq 2z^2$, definida en A^3

Halla el valor de verdad de las proposiciones:

i) $\exists x, \exists y, f(x, y)$

ii) $\forall x, \exists y, g(x, y)$

iii) $\forall x, \forall y, g(x, y)$

iv) $\exists x, \exists y, \exists z, h(x, y, z)$

v) $\exists x, \exists y, \forall z, h(x, y, z)$

2) Sean $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ 1 \leq x \leq 10\}$ y la función proposicional f tal que $f(x, y)$: $x + y \leq 14$, definida en $A \times A$. Considera las siguientes expresiones e indica, en caso de que sea una proposición, su valor de verdad, y en caso de que sea una función proposicional determina el conjunto de validez:

a) $\forall x, x \in A, f(x, y)$

b) $\forall x, x \in A, \exists y, y \in A, f(x, y)$

c) $\forall x, x \in A, \forall y, y \in A, f(x, y)$

d) $\exists y, y \in A, f(x, y)$

3) Expresa la negación de la siguiente proposición:

$\forall x, x \in \mathbb{R}, \exists (-x), (-x) \in \mathbb{R}, x + (-x) = -x + x = 0$ (Existencia de opuesto en $\mathbb{R}$)

---

[24] Extraído de Becerra, M. E. & Tosetti, A. M. *Ficha Nº 2. Matemática Básica. 2ª parte (Lógica).* Montevideo: Centro de Impresiones y Publicaciones *Nibia Sabalsagaray.* CEIPA. (pp. 15-16).

Bibliografía consultada

Becerra, M. E. & Tosetti, A. M. *Ficha Nº 2. Matemática Básica. 2ª parte (Lógica).* Montevideo: Centro de Impresiones y Publicaciones *Nibia Sabalsagaray*. CEIPA.

Bosch, J. (1965). *Introducción al simbolismo lógico.* Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

González Cabillón, J. (1993). *Matemática. 5º año.* Tomo I. Montevideo: Colección Cánepa.

Ochoviet, C. & Olave, M. (2006). *Matemática 4.* Montevideo: Santillana.

Osin, L. (1975). *Introducción al análisis matemático.* 1ª Edición. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.