

Profesorado de Informática - Ciencias de la Computación - INET - CFE
Segunda Prueba Parcial - 06/11/2010 - Matemática II

El parcial es sin material a la vista. Se puede tener sólo una hoja con anotaciones y fórmulas.

1) Sea $f : f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)$

Estudio analítico (dominio, límites laterales en los puntos de no existencia, raíces, signo, asíntotas, derivada primera, crecimiento, extremos relativos) y representación gráfica de la función f

2) Determinar los valores a y b reales para que g sea derivable en \mathbb{R} .

$$g : g(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq -2 \\ \frac{1 - e^{x+2}}{x+2} & x > -2 \end{cases}$$

3) a) Calcula el área limitada entre el eje OX y el gráfico de la función $f : f(x) = \frac{x}{(x-1)^3}$

en el intervalo $\left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right]$

b) Hallar H , una primitiva de $h : h(x) = (2x-4) \cdot \cos x$ sabiendo que $H(\pi) = 1$

4) a) Calcular la derivada de $f : f(x) = 2x^3 - 4x$ en el punto $x = 2$ usando la definición de derivada en un punto.

b) Demostrar que $j : j(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en el punto $x = 0$, pero no derivable en ese punto.

c) Sea $f : f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. Hallar los puntos $(\alpha, f(\alpha)) \in G(f)$ en los cuales la tangente al gráfico es paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 1$.

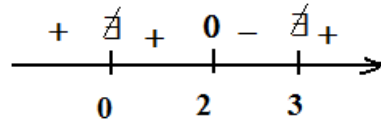
AYUDAS PARA LA RESOLUCIÓN:

1) $f : f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)$

Dominio: $R - \{0, 3\}$

Raíz: $x = 2$

Signo de $f(x)$:



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

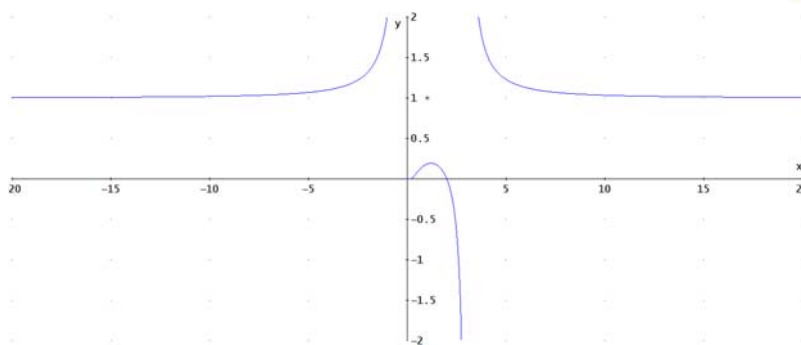
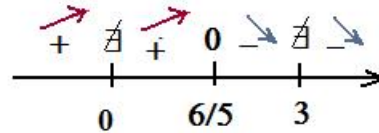
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ Por lo tanto la asíntota es la recta $y = 1$.

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}} \right)' \left(\frac{x-2}{x-3} \right) + e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x-3-x+2}{(x-3)^2} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{x-2}{x-3} \right) + e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{(x-3)^2} \right) =$$

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}} \right) \left(\frac{(x-2)(x-3) - x^2}{x^2(x-3)^2} \right) = \left(e^{-\frac{1}{x}} \right) \left(\frac{-5x+6}{x^2(x-3)^2} \right)$$

Entonces $f(x)' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$

sg $f(x)'$



2) $g : g(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq -2 \\ \frac{1 - e^{x+2}}{x+2} & x > -2 \end{cases}$

$ax + b$ al ser un función polinómica es continua para todos los reales. $\frac{1 - e^{x+2}}{x+2}$ es continua en el intervalo $(-2; +\infty)$

Para que $g(x)$ sea continua en el punto $x=-2$ se debe cumplir que

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = g(-2) \quad y \quad g(-2) = -2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1 - e^{x+2}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$$

De aquí obtenemos que $-2a + b = -1$

Ahora debemos escribir las condiciones para que sea derivable:

Podemos hallar la función derivada en cada uno de los intervalos y luego hacer $\lim_{x \rightarrow -2} g'(x)$

Para el intervalo $(-\infty; -2)$ $g'(x) = a$

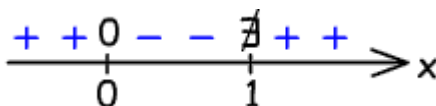
$$\text{En el intervalo } (-2; +\infty) \quad g'(x) = \frac{-e^{x+2}(x+2) - (1 - e^{x+2})}{(x+2)^2} = \frac{-xe^{x+2} - 2e^{x+2} - 1}{(x+2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-e^{x+2} - xe^{x+2} - e^{x+2}}{2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-e^{x+2}(x+2)}{2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-e^{x+2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Entonces $a = -\frac{1}{2}$ y como $-2a + b = -1 \Rightarrow b = -2$

3) a) La función cambia de signo dentro del intervalo de integración. Hay que separar en dos integrales en $x = 0$, que es la raíz de la función.

El signo de la función es :



$$\text{Área} = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x}{(x-1)^3} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(x-1)^3}$$

Para calcular una primitiva de dicha función, hay varios caminos: se puede usar el método tradicional de "fracciones simples" o usar un artificio matemático para que quede mas sencilla.

$$\int \frac{x}{(x-1)^3} = \int \frac{x-1+1}{(x-1)^3} = \int \frac{x-1}{(x-1)^3} + \int \frac{1}{(x-1)^3} = \int \frac{1}{(x-1)^2} + \int \frac{1}{(x-1)^3}$$

Y ahora cada una de ellas está en tablas.

$$\text{Área} = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x}{(x-1)^3} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{(x-1)^3} = \frac{1}{18} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{9}$$

3) b) $\int (2x-4) \cdot \cos x$ Conviene aquí aplicar el "método de partes."

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g \quad \text{En este caso } f(x) = 2x-4 \quad \text{entonces } f'(x) = 2$$

$$g'(x) = \cos x \quad \text{entonces } g(x) = \text{sen } x$$

En resumen: $\int (2x-4) \cdot \cos x = (2x-4) \cdot (\text{sen } x) - \int (2) \cdot (\text{sen } x)$

Entonces: $H(x) = (2x-4) \cdot (\text{sen } x) - 2 \int \text{sen } x = (2x-4) \cdot (\text{sen } x) + 2 \cdot \cos x + K$

Además $H(\pi) = (2\pi-4) \cdot (\text{sen } \pi) + 2 \cdot \cos \pi + K = 1$ O sea que $K = 3$.

Respuesta final: $H(x) = (2x-4) \cdot \text{sen } x + 2 \cdot \cos x + 3$

4)a) $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ cuando existe y es finito.

En este caso, $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ Primero buscamos $f(2) = 8$

$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x - 8}{x - 2}$ Aplicamos ahora Ruffini para poder calcular este límite.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 0 & -4 & -8 \\ & & 4 & 8 & 8 \\ \hline & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x^2 + 4x + 4)}{x - 2} = 20$$

4)b) Aquí sólo aplicamos la definición de continuidad en un punto, y luego la definición de derivada en un punto. Cuando en la definición de derivada en cero, hacemos el límite cuando x tiende a cero, éste da infinito, con lo cual la función no es derivable en $x = 0$.

4)c) La pendiente de la tangente a una curva en cualquier punto es justamente la derivada de dicha función en ese punto.

$$f : f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1. \quad \text{Entonces} \quad f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

Para que sea paralela a la recta $y = 3x + 1$, tiene que tener la misma pendiente.

La pendiente de la recta $y = 3x + 1$ es 3.

La pendiente de $f : f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ es justamente $f'(x) = x^2 - 4x + 3$

Como buscamos el ó los puntos en los cuales son iguales, tenemos que $x^2 - 4x + 3 = 3$

Resolviendo queda que la solución es $x = 0$ o $x = 4$

Los puntos del gráfico de la función los buscamos calculando $f(0)$ y $f(4)$

Entonces la respuesta final es $(0, -1)$ y $(4, \frac{1}{3})$.

