Vamos a resolver la ecuación en diferencias no homogenea $a_{n+2}+6a_{n+1}+12a_n=2^n$ con las condiciones iniciales, llamadas condiciones de frontera: $a_0=1 \;\; y \;\; a_1=2$

Las soluciones de una ecuación en diferencias no homogenea está formada por la suma de la solución general de la homogenea más una solución particular.

Busquemos una solución particular. Lo intentamos con una solución "parecida", con $a_n=K.2^n$.

Sustituyendo en la ecuación original, la no homogenea, para n=0, nos queda:

$$a_2+6a_1+12a_0=2^0 \quad\Rightarrow\quad K.2^2+6.K.2^1+12.K.2^0=2^0 \quad\Rightarrow\quad 4K+12K+12K=1$$

y luego de simplificar, queda: $K=\dfrac{1}{28}$

Entonces la solución general es la suma de las soluciones de la homogenea y de la no homogenea:

$$a_n=k_1.\left(\sqrt{12}\right)^n.\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right)+\ k_2\left(\sqrt{12}\right)^n.sen\left(\frac{5n\pi}{6}\right)+\frac{1}{28}.2^n$$

. Falta ahora calcular $k_1 \;\; y \;\; k_2$.

Para calcular $k_1 \; y \; k_2$, usamos otra vez las condiciones iniciales $a_0=1,\ a_1=2$.

$$a_0=k_1.\left(\sqrt{12}\right)^0.\cos(0)\ +\ k_2\left(\sqrt{12}\right)^0.sen(0)+\frac{1}{28}.2^0=1 \quad\Rightarrow\quad k_1+\frac{1}{28}=1 \quad\Rightarrow\quad k_1=\frac{27}{28}$$

$$a_1=\frac{27}{28}.\left(\sqrt{12}\right)^1.\cos(\frac{5\pi}{6})+k_2\left(\sqrt{12}\right)^1.sen(\frac{5\pi}{6})+\frac{1}{28}.2^1=\frac{27}{28}.\left(\sqrt{12}\right)^1.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+k_2\left(\sqrt{12}\right)^1.\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{28}=2$$

$$-\frac{27}{28}.\frac{\sqrt{36}}{2}+k_2\left(\sqrt{12}\right).\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{28}=2 \;\Rightarrow\; k_2\left(\sqrt{12}\right).\left(\frac{1}{2}\right)=2+\frac{81}{28}-\frac{2}{28} \Rightarrow\; k_2\left(\sqrt{12}\right).\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{135}{28}$$

$$k_2=\frac{135}{28}.\frac{2}{\sqrt{12}} \Rightarrow k_2=\frac{135}{14.\sqrt{12}} \Rightarrow k_2=\frac{135.\sqrt{12}}{14.\sqrt{12}.\sqrt{12}} \Rightarrow k_2=\frac{135.\sqrt{12}}{168} \Rightarrow k_2=\frac{45.\sqrt{4}\sqrt{3}}{56} \Rightarrow k_2=\frac{45.\sqrt{3}}{28}$$

$$\boxed{a_n=\frac{27}{28}.\left(\sqrt{12}\right)^n.\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right)+\ \frac{45.\sqrt{3}}{28}.\left(\sqrt{12}\right)^n.sen\left(\frac{5n\pi}{6}\right)+\frac{1}{28}.2^n \quad , \quad n\in\mathbb{N}}$$

Ejercicio: buscar los primeros términos de esta sucesión, sustituyendo los primeros valores de n.

"Verificación": vamos a obtener los valores de la sucesión directamente de la fórmula original, sustituyendo los valores iniciales.

$\boxed{a_{n+2} + 6a_{n+1} + 12a_n = 2^n}$ $\boxed{a_0 = 1 \quad y \quad a_1 = 2}$

Sucesión $a_{n+2} = 2^n - 6a_{n+1} - 12a_n$

Para $n = 0,\quad a_{0+2} = 2^0 - 6a_{0+1} - 12a_0 = 1 - 6.2 - 12.1 = -23$ Entonces $a_2 = -23$

Para $n = 1,\quad a_{1+2} = 2^1 - 6a_{1+1} - 12a_1 = 2 - 6.(-23) - 12.2 = 116$ Entonces $a_3 = 116$

Para $n = 2,\quad a_{2+2} = 2^2 - 6a_{2+1} - 12a_2 = 4 - 6.116 - 12.(-23) = -416$ Entonces $a_4 = -416$

Haskell:

```
pato:: Integer->Integer
pato n  |n==0 =1
        |n==1 =2
        |otherwise = (-6)*pato(n-1) +(-12)*pato (n-2) + 2^(n-2)
```

Prestar atención al índice de 2^n en la implementación en Haskell. ¿Porqué es 2 elevado a la (n-2)?

Y así es como lo vemos cuando lo aplicamos en Haskell:

```
Main> pato 0
1
Main> pato 1
2
Main> pato 2
-23
Main> pato 3
116
Main> pato 4
-416
Main>
```