

El parcial es sin material a la vista. Se puede tener sólo una hoja con anotaciones y fórmulas.

1) Calcular $\int_1^2 x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 8}$

2) Calcular la primitiva de la función $h : h(x) = \frac{L(x)}{x^4}$ que tenga raíz 1.

3) Sea p una función con derivada continua en $[0,4]$ tal que $p(0) = 5$ y $\int_0^4 p = 7$

Calcular $\int_0^4 (4-x) \cdot p'(x)$

4) a) Estudio analítico y representación gráfica de $f : f(x) = \frac{x}{2 - L|x|}$

b) Estudiar la derivabilidad y la continuidad de la función g en $x = 0$ discutiendo según a real,

siendo $g : g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2 - L|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) Resolver la ecuación $f(x) = x$

d) ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f inyectiva? Justifique sus respuestas.

RESOLUCIÓN:

1) Calcular $\int_1^2 x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 8}$

$$\int_1^2 x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 8} = \frac{1}{3} \cdot \int_1^2 3 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 8} = \frac{1}{3} \cdot \int_9^{16} \sqrt{u}$$

Usamos el teorema de cambio de variable o sustitución.

$$u = g(x) = x^3 + 8 \quad g'(x) = 3x^2 \quad \text{con} \quad g(1) = 9 \quad \text{y} \quad g(2) = 16$$

Además $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ entonces

$$\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \int \sqrt{u} = \int u^{\frac{1}{2}} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{u})^3 + c$$

Entonces seguimos:

$$\frac{1}{3} \cdot \int_9^{16} \sqrt{u} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{u})^3 \Big|_9^{16} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (\sqrt{16})^3 - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{9})^3 \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4^3 - \frac{2}{3} \cdot 3^3 \right) = \frac{74}{9}$$

2) Calcular la primitiva de la función $h: h(x) = \frac{L(x)}{x^4}$ que tenga raíz 1.

$$\int \frac{L(x)}{x^4} = \int \left(\frac{L(x)}{1} \cdot \frac{1}{x^4} \right) = \int \left(Lx \cdot \frac{1}{x^4} \right) \quad \text{Aplicaremos el método de "Partes".}$$

$$f(x) = Lx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^4} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{3x^3}$$

$$\text{PARTES:}$$
$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

$$\begin{aligned} \int \left(Lx \cdot \frac{1}{x^4} \right) &= Lx \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) - \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) = \\ &= Lx \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3x^3} = Lx \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) + \int \frac{1}{3x^4} = Lx \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) + \frac{1}{3} \int x^{-4} = \\ &= Lx \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-3}}{-3} = Lx \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) - \frac{1}{9x^3} + C \end{aligned}$$

Entonces, la primitiva, que la llamaremos j(x) es $Lx \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) - \frac{1}{9x^3} + C$

Para que tenga raíz 1, $j(1)=0$

$$j(x) = Lx \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) - \frac{1}{9x^3} + C$$

$$j(1) = L1 \cdot \left(-\frac{1}{3 \cdot 1^3} \right) - \frac{1}{9 \cdot 1^3} + C = 0 \Rightarrow -\frac{1}{9} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{9}$$

Respuesta: $j(x) = Lx \cdot \left(-\frac{1}{3x^3} \right) - \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{9}$

Un poco más prolijo: $j(x) = -\frac{Lx}{3x^3} - \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{9}$

3) Sea p una función con derivada continua en $[0,4]$ tal que $p(0) = 5$ y $\int_0^4 p = 7$

Calcular $\int_0^4 (4-x) \cdot p'(x)$

Vamos a aplicar partes de nuevo.

$$\int_a^b f \cdot g' = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g$$

$$f(x) = 4-x \Rightarrow f'(x) = -1$$

$$g'(x) = p'(x) \Rightarrow g(x) = p(x)$$

$$\int_0^4 (4-x) \cdot p'(x) = (4-x) \cdot p(x) \Big|_0^4 - \int_0^4 (-1) \cdot p(x)$$

$$= (4-x) \cdot p(x) \Big|_0^4 + \int_0^4 p(x) = (4-4) \cdot p(4) - (4-0) \cdot p(0) + \int_0^4 p(x) = -4 \cdot 5 + 7 = -13$$

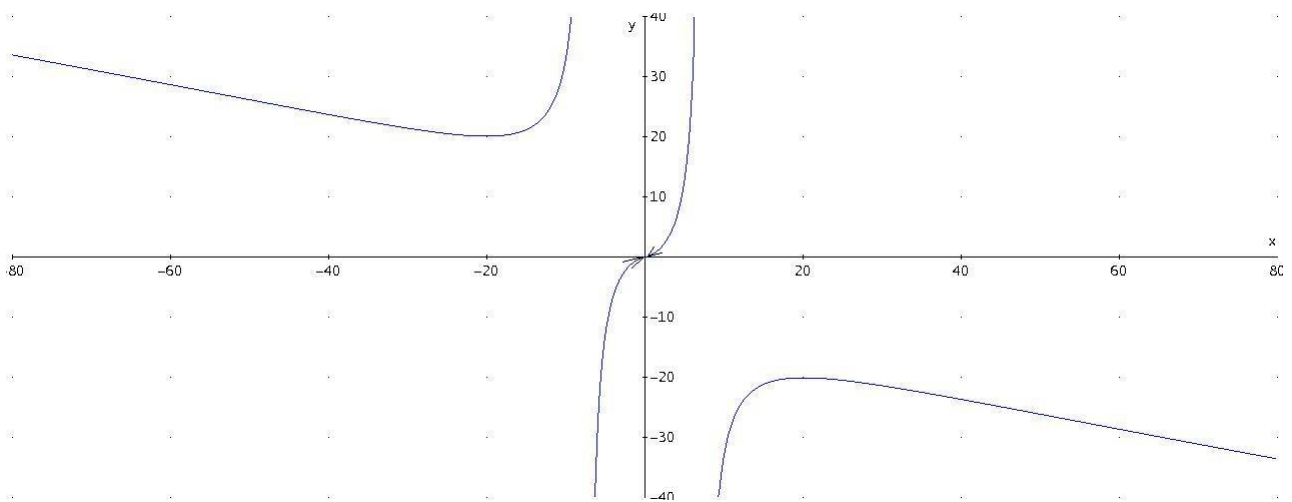
4) a) Estudio analítico y representación gráfica de $f : f(x) = \frac{x}{2-L|x|}$

Resumen del estudio:

Dominio $D(f) = \mathbb{R} - \{0, e^2, -e^2\}$

$$f'(x) = \frac{3-L|x|}{(2-L|x|)^2} \quad f''(x) = \frac{4-L|x|}{x \cdot (2-L|x|)^3}$$





Los puntos de inflección no se ven en esta gráfica, pero por lo menos tenemos una idea de cómo es la gráfica de la función $f(x)$.

b) Estudiar la derivabilidad y la continuidad de la función g en $x = 0$ discutiendo según a real,

siendo
$$g : g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2 - L|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Buscando el límite de $g(x)$ cuando x tiende a cero, da 0. Se puede hacer por L'hospital. Entonces si $a=0$, la función g será continua en 0. Si a no es cero, no.

Para la derivabilidad buscamos el límite de la derivada y nuevamente nos da cero, con lo cual la función g es derivable en 0.

c) Resolver la ecuación $f(x) = x$

Para las condiciones de existencia de $f(x)$, podemos despejar así:

$$\frac{x}{2 - L|x|} = x \Leftrightarrow x = x \cdot (2 - L|x|) \Leftrightarrow \frac{x}{x} = 2 - L|x| \Leftrightarrow 1 = 2 - L|x|$$

$$L|x| = 1 \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{L} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{L} \\ x = -\frac{1}{L} \end{cases}$$

d) ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f inyectiva? Justifique sus respuestas.

f no es inyectiva porque hay valores del codominio que tienen más de una preimagen. Por ejemplo, si trazamos la gráfica de $w:w(x)=30$, superpuesta a la gráfica de f , veremos que se cortan en 3 puntos.

f no es sobreyectiva porque hay elementos del codominio que no tienen preimagen. Bueno, en realidad, hay un sólo elemento del codominio que no tiene preimagen: el 0.

