Matemática I para Informática   Segundo parcial   03/11/08   Prof. Saúl Tenenbaum
Intentando resolverlo.......

1) Con los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 8 y 9 se forman códigos de 4 dígitos, sin repetir digitos, para usar como claves para una alarma.
i) ¿Cuántos códigos diferentes se pueden formar?
ii) ¿En cuántos de ellos aparecen las cifras 2,3 y 4?
iii) Si se ordenan en forma creciente, ¿que lugar ocupa el número 6349?

1) i) $A_4^7 = 7.6.5.4 = 840$

ii) $A_1^4 . P_4 = 4.4.3.2.1 = 96$ Primero elegimos un dígito de los 4 que nos quedan, y luego hay que ver de cuantas formas se pueden ordenar. Esto es, los 3 que ya tenemos, el 2,3 y4 mas el cuarto digito elegido: son 4.

iii)
840/7=120   120/6=20   20/5=4   4/4=1

2---120			
3---120	2---20		
4---120	**3**---20	2---4	
5---120	4---20	**4**---4	2---1
6---120	5---20	5---4	5---1
8---120	8---20	8---4	5---1
9---120	9---20	9---4	**9**---1

Lugar = 120x4 + 20x1 + 4x1 + 1x3 + 1 = 508
El último 1 es por el lugar. (recordemos que si tenemos 5 personas adelante en una fila, nosotros estamos en el sexto lugar, no el quinto !!!)

2) Demostrar que si n es un número natural tal que la suma de sus divisores es n+1, entonces n es primo.

2) Recordemos que un número es primo si sólo es divisible entre si mismo y la unidad.
El número **n** es divisible entre **n**. Si la suma de todos los divisores de **n** es **n+1** y **n** ya es un divisor de **n**, nos queda sólo el 1.
O sea, si le restamos **n** a **n+1** nos queda **1**. Esto es, a la suma de todos los divisores de **n** le restamos un divisor seguro y nos queda **1**, por lo que el otro divisor es este **1**. En resumen, **n** sólo tiene como divisores **n** y **1**.
Entonces es primo.

3) Demostrar que para cualquier número natural mayor que cero, se cumple que $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ es múltiplo de "a", un número natural que se determinará.

3)
$$para \quad n = 1, \quad 4^{1+1} + 5^{2.1-1} = 4^2 + 5^1 = 21 = 3.7$$
$$para \quad n = 2, \quad 4^{2+1} + 5^{2.2-1} = 4^3 + 5^3 = 189 = 3^3.7$$
Podemos usar como a 3 ó 7ó 21.

Como ejemplo, usaremos 21.

$$Hipótesis) \quad n = h, \quad 4^{h+1} + 5^{2.h-1} = \dot{21}$$

$$Tésis) \quad n = h+1, \quad 4^{h+1+1} + 5^{2.(h+1)-1} \overset{?}{=} \dot{21}$$

$$Demost: \quad 4^{h+2} + 5^{2h+1} = 4^{h+1}.4 + 5^{2h-1}.5^2 = 4^{h+1}.4 + 5^{2h-1}.(4+21) = \underbrace{\left(4^{h+1} + 5^{2h-1}\right)}_{\dot{21} \ por \ Hipótesis}.4 + \underbrace{5^{2h-1}.21}_{\dot{21}} = \dot{21}$$

4) Demostrar que la suma de los cubos de 3 números naturales consecutivos es siempre múltiplo de 9.

$$H)\quad n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=\dot{9}$$

4) $$T)\quad (n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3\overset{?}{=}\dot{9}$$

$$Dem:\quad (n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3=\underbrace{(n+1)^3+(n+2)^3+n^3}_{\dot{9}\ por\ \ Hipotesis}+\underbrace{9n^2+27n+27}_{\dot{9}}=\dot{9}$$

5) Encontrar todas las parejas de naturales a y b que cumplan que $a^2.b+a.b^2=48256$ y sabiendo además que el mínimo común múltiplo entre a y b es 416.

$$a^2.b+a.b^2=48256$$

$$ab(a+b)=48256\qquad además\qquad a.b=m.d$$

5) $$416.d.(a+b)=48256\quad entonces\quad d.(a+b)=\frac{48256}{416}$$

$$d.(a+b)=116$$

$$d.(a+b)=2^2.29$$

Ahora vamos a hacer un cuadro con los posibles valores de d y de a+b.

d	a+b	a	b	m
29	4	imposible; d>a		
59	2	imposible; d>a		
116	1	imposible; d>a		
1	116	imposible; d=1		
4	29	imposible; d par y a+b es impar		
2	58	30	28	420
2	58	**32**	**26**	416 **OK**
2	58	34	24	408
2	58	36	22	396

Los demás valores no van a servir.

6) Se tienen n puntos, de forma tal que 3 cualquiera de ellos no están alineados.
i) ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar?
ii) Implementar una función en Haskell que nos de la respuesta al ingresar el valor de n.

6) i) Hay que elegir 3 puntos de n disponibles, sin importar el orden. Esto es, combinaciones.

$$C_3^n=\frac{n.(n-1).(n-2)}{3.2.1}$$

ii) Hay muchas formas de hacerlo con Haskell. Va una.

```
tri::  Double->Double
tri n  | n<3       = error "no hay triangulos"
       | otherwise = n*(n-1)*(n-2)/6
```

En esta forma hay que usar Double porque hay una división y sino daría error. Tiene el inconveniente que la respuesta es con coma. Por ejemplo, tri 5 es 10.0
Si esto molesta, para que la respuesta sea 10, un número natural. se puede hacer así:

```
trinatural:: Integer-> Integer
trinatural n | n<3      = error "no hay triangulos"
             | otherwise = div (n*(n-1)*(n-2)) 6
```

7) i) Implementar una función en Haskell que sume todos los número impares, desde 1 hasta un número impar cualquiera.
ii) Inducir, tomando los primeros valores, cual podría ser una fórmula para dicha suma.
iii) Demostrarla por Inducción Completa.

7)i)

```
sumo:: Integer-> Integer
sumo 1 = 1
sumo n| mod n 2 ==0 = error "esto es solo para sumar impares"
      | otherwise = sumo (n-2) + n
```

ii) Veamos algunas sumas:

1	$= 1 = 1^2$
1+3	$= 4 = 2^2$
1+3+5	$= 9 = 3^2$
1+3+5+7	$=16 = 4^2$
1+3+5+7+9	$=25 = 5^2$

Podremos suponer que la suma de los impares consecutivos dara un cuadrado perfecto.
¿Cómo escribimos un número impar, en forma genérica?
2n es par. Entonces 2n+1 o 2n-1 es impar.

A) $1+3+5+......+(2.n-1)=n^2$ B) $1+3+5+......+(2.n+1)=n^2$

¿Las dos fórmulas sirven?

Vamos a ver si verifican. Por ejemplo, para n=4,
A) 2n-1 es 7 y n^2=16, está bien,
B) 2n+1=9 y n^2=16 está mal. La fórmula es la A.
Falta la demostración por Inducción Completa, que es muy sencilla y queda de deberes!!!
