Examen de Matemática I

20 / dic / 2011

"Intento de resolución"

1) a) FALSO

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{2,3,4\}$

$C = \{7,3,4\}$

$U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$B \cap C = \{3,4\}$

$\overline{B \cap C} = \{1,2,5,6,7\}$

$A \cup (\overline{B \cap C}) = \{1,2,3,5,6,7\}$

$\neq$

$B \cup C = \{2,3,4,7\}$

$\bar{A} = \{4,5,6,7\}$

$\bar{A} \cap (B \cup C) = \{4,7\}$

ESTE ES SÓLO UN CONTRAEJEMPLO DE LOS INFINITOS POSIBLES.

1) b) FALSO

$A = \{1,2\}$

$B = \{2,3\}$

$C = A \cup B = \{1,2,3\}$

$C - A = \{3\}$

$\neq$

1) c) VERDADERO. ES UNA DE LAS LEYES DE "DE MORGAN".

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

DEMOSTRAREMOS LA DOBLE INCLUSIÓN.

$\wedge$ y

$\vee$ ó

$(\Rightarrow)$

$$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

$(\Leftarrow)$

$$x \in \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$$

TAMBIÉN SE PODRÍA HABER HECHO EN UN SÓLO RENGLÓN, USANDO $\Leftrightarrow$ (SI Y SÓLO SI).

2) a) $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^2+b=c^2+d$

i) IDÉNTICA $(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a^2+b=a^2+b$ SE CUMPLE POR LA PROP. IDÉNTICA EN $\mathbb{Z}$.

ii) SIMÉTRICA SI $(a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)$

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^2+b=c^2+d$

$(c,d)R(a,b) \Leftrightarrow c^2+d=a^2+b$

SE CUMPLE POR LA PROP. SIMÉTRICA EN $\mathbb{Z}$.

iii) TRANSITIVA SI $(a,b)R(c,d)$ Y $(c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)$

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)R(c,d) \Rightarrow a^2+b=c^2+d \\ (c,d)R(e,f) \Rightarrow c^2+d=e^2+f\end{array}\right\} \Rightarrow$$

ENTONCES, POR LA PROP TRANSITIVA EN $\mathbb{Z}$,

$(a,b)R(e,f) \Leftarrow a^2+b=e^2+f$

ENTONCES, R ES DE EQUIVALENCIA

Examen de Matemática I

20 / dic / 2011

"Intento de resolución"

b) $[(0,0)] = \{(x,y) / (x,y)R(0,0)\}$

$x^2+y=0^2+0 \Rightarrow x^2+y=0 \qquad y=-x^2$

$[(0,0)] = \{(x,y) / x^2+y=0\}$

SON ELEMENTOS DE ESTE CONJUNTO: $(4,-16)$, $(7,-49)$, $(-5,-25)$, $(-3,-9)$, $(0,0)$, ...

3) a) i) IDENTICA $aSa \Rightarrow a \in M^*(a)$ SE CUMPLE PUES $a = a \cdot 1$

Examen de Matemática I

20 / dic / 2011

"Intento de resolución"

ii) ANTISIMÉTRICA Si aSb y $bSa \Rightarrow a=b$

$aSb \Rightarrow b \in M^*(a) \Rightarrow b = a \cdot k \quad h \in N^*$

$bSa \Rightarrow a \in M^*(b) \Rightarrow a = b \cdot j \quad j \in N^*$

$b = a \cdot h \Rightarrow b = (b \cdot j) \cdot h \Rightarrow j \cdot h = 1 \Rightarrow$

$j = h = 1 \Rightarrow a = b$

iii) TRANSITIVA

Si aSb y $bSc \Rightarrow aSc$

$$\left.\begin{array}{l} aSb \Rightarrow b = a \cdot h \\ bSc \Rightarrow c = b \cdot j \end{array}\right\} \Rightarrow c = (a \cdot h) \cdot j \Rightarrow c = a \cdot (hj)$$

$\Rightarrow c = M^*(a) \Rightarrow aSc$ ✓

NO ES DE ORDEN TOTAL PORQUÉ NO TODOS LOS NÚMEROS DEL CONJUNTO ESTÁN RELACIONADOS.

POR EJEMPLO, $a, b \in N$

Si $a = 13$, $b = 17$, $13 \not S 17$

$17 \not S 13$

13 y 17 NO ESTÁN RELACIONADOS.

b) $$\left.\begin{array}{l} x \in M^*(a) \Rightarrow aSx \\ \text{ADEMÁS} \quad pSa \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{PROPIEDAD TRANSITIVA}]{\text{POR LA}} pSx$$ ✓

REPASO: $M^*(a)$ ES EL CONJUNTO DE LOS MÚLTIPLOS DE a EXCLUIDO EL CERO

Si $b \in M^*(a) \Rightarrow b = a \cdot k$ CON $h \in N^*$

EJEMPLO:

ELEMENTOS DE $M^*(4)$: 4, 8, 12, 16, 20, ...

4) ANTES DE EMPEZAR, VAMOS A PONER ALGUNOS EJEMPLOS.

$X = \{1, 2, 3\}$

$Y = \{2, 3, 4\}$

Examen de Matemática I

20 / dic / 2011

"Intento de resolución"

$f(X, Y) = \{1, 2, 3, 4\}$

$g(X, Y) = \{2, 3\}$

f ES LA FUNCIÓN "UNIÓN", g ES LA "INTERSECCIÓN".

EL DOMINIO Y CODOMINIO DE LAS FUNCIONES f Y g NO SON NÚMEROS ENTEROS, SON SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{Z}$.

AHORA SÍ:

4) a) f NO ES INYECTIVA ; g TAMPOCO

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad f(A, B) = f(X, Y)$ PERO $(A, B) \neq (X, Y)$

$B = \{4\}$

$D = \{2, 3, 78\}$ $\quad g(A, D) = g(X, Y)$ PERO $(A, D) \neq (X, Y)$

f Y g, AMBAS, SON SOBREYECTIVAS.

DADO CUALQUIER SUBCONJUNTO DE $\mathbb{Z}$, POR EJEMPLO, W, SIEMPRE VAN A EXISTIR CONJUNTOS $\emptyset$ Y W TAL QUE:

$f(W, \emptyset) = W \cup \emptyset = W$

Hay más ejemplos. Aca sólo se indica uno de cada uno.

$g(W, W) = W \cap W = W$

b) f^{-1} y g^{-1} NO SON FUNCIONES PUES f Y g NO SON INYECT.