TEORÍA DE CONJUNTOS

CONOCIMIENTOS BÁSICOS

Cuando decimos: "un elemento pertenece a un conjunto" estamos utilizando tres conceptos primitivos: elemento, conjunto y pertenencia. Un concepto primitivo es un concepto que no se define.

Si a es un elemento del conjunto A se denota con la relación de pertenencia: $a \in A$.
En caso contrario, si a no es un elemento de A se denota $a \notin A$.

Ejemplos de conjuntos:

∅: el conjunto vacío, que carece de elementos.
N: el conjunto de los números naturales.
Z: el conjunto de los números enteros.
Q : el conjunto de los números racionales.
R: el conjunto de los números reales.
C: el conjunto de los números complejos.

Se puede definir un conjunto:

- por extensión o enumeración, esto es nombrando todos y cada uno de sus elementos.
- por comprensión, diciendo cuál es la propiedad o condición que los caracteriza.

Axioma: Un conjunto A está determinado cuando, dado un elemento cualquiera x, es posible decidir si pertenece o no al conjunto.

Un conjunto se suele denotar encerrando entre paréntesis llaves a sus elementos, si se define por extensión y, si se define por comprensión, entre paréntesis llaves se indica la propiedad que caracteriza a sus elementos. Por ejemplo:

$A = \{1,2,3, \ldots ,n\}$

$B = \{p: p \in Z \wedge p \text{ es par}\}$

Se dice que A está **contenido** en B (también que A es un **subconjunto** de B o que A **es una parte** de B), y se denota: $A \subseteq B$, si todo elemento de A lo es también de B, es decir, $\forall a$ se cumple que $a \in A$ y $a \in B$.

Dos conjuntos A y B se dicen **iguales**, y se denota $A = B$, si simultáneamente $A \subset B$ y $B \subset A$; esto equivale a decir que tienen los mismos elementos (o también la misma propiedad característica).

Para cualquier conjunto A se demuestra: $\varnothing \subset A$ y $A \subset A$.

A es un **subconjunto propio** de B, o una **parte propia** de B, si $A \subset B$ y $A \neq B$. Esto es, $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ y $\exists\, b \in B \,/\, b \notin A$. y se denota: $A \subset B$.

Cuando en determinado contexto se consideran siempre conjuntos que son partes de uno dado U, se suele considerar al conjunto U como conjunto universal o de referencia.

El conjunto formado por todos los subconjuntos de uno dado A se llama **familia de partes de A** y se denota $\mathcal{P}(A)$.

Entonces, la relación $B \subset A$ es equivalente a decir que $B \in \mathcal{P}(A)$. Ejemplos:

Si $A = \{a, b\}$ entonces $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Si $a \in A$ entonces $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$.

El número de subconjuntos de un conjunto A, es 2^n; siendo n el número de elementos del conjunto A. ¿Cuál es el número de elementos del conjunto $\mathcal{P}(A)$?

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Se llama **unión** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A ó de B, este conjunto se expresa: $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ y/ó } x \in B\}$.

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y

$B = \{a, h, j\}$.

$A \cup B$ es el conjunto $\{a, b, c, d, e, f, h, j\}$.

Se llama **intersección** de dos conjuntos A y B al conjunto formado por objetos que son elementos de A y de B, este conjunto se expresa: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$.

Ejemplo: 1) Sean los conjuntos $A =\{a, b, c, d, e, f\}$ y

$B = \{a, h, j\}$. $A \cap B = \{a\}$.

2) $C = \{ d, e, f, g, h\}$ y $D = \{p, q, r\}$ entonces

$C \cap D = \{\}$. Si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío diremos que los conjuntos son **disjuntos.**

PROPIEDADES **UNION**

1.- Idempotencia $A \cup A = A$
2.- Conmutativa $A \cup B = B \cup A$
3.- Asociativa $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4.- Neutro $A \cup \varnothing = A$
5.- Absorción $A \cup (A \cap B) = A$
6.- Distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7.- Complementariedad $A \cup A' = U$

PROPIEDADES **INTERSECCIÓN**

1. - Idempotencia $A \cap A = A$
2. - Conmutativa $A \cap B = B \cap A$
3. - Asociativa $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. – Neutro $A \cap \varnothing = A$
5. - Absorción $A \cap (A \cup B) = A$
6. - Distributiva $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. - Complementariedad $A \cap A' = \varnothing$

Dados dos conjuntos A y B, se llama **diferencia** al conjunto **A - B** $= \{a: a \in A / a \notin B\}$.

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $B = \{a, h, j\}$. La diferencia $A - B$ es $\{b, c, d, e, f\}$. La diferencia $B - A$ es el conjunto $\{h, j\}$

Se llama **diferencia simétrica** entre A y B al conjunto $(A - B) \cup (B - A)$.

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y

B = {a, h, j}.

La diferencia A - B es el conjunto {b, c, d, e, f}. La diferencia B - A es el conjunto {h, j}; la diferencia simétrica es el conjunto {b, c, d, e, f, h, j}.

Complemento de un conjunto

Si se considera un conjunto referencial B y A $\in \mathcal{P}$(B) entonces la diferencia B - A es el **complemento de A con respecto al conjunto B** y se denota A'.

Ej. B = {0, 1, 2} y A = {0,1} entonces A' = {2}.

Si A y B son subconjuntos de un cierto conjunto universal U, entonces es fácil ver que A - B = A $\cap$ B'.

Producto cartesiano de dos conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se define el producto cartesiano de ambos como el conjunto de pares ordenados (a, b) donde a es un elemento de A y b es un elemento de B.

A **X** B = {(a, b): a $\in$ A y b $\in$ B}

Ejemplo: Sean A = {a, b, c} y B = {1, 2} dos conjuntos. El producto cartesiano es el conjunto
A x B = {(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)}

El **cardinal** de un conjunto A es el número de elementos del conjunto A. Se anota # A.

El cardinal del producto cartesiano es el producto de los cardinales de los dos conjuntos, # {A x B} = #{A} x #{B}.

Dos pares (a, b) y (c, d) de A **X** B son iguales si a = c y b = d.

Si dados cuatro conjuntos A, B, C, D se cumple que

A **X** B = C **X** D entonces A = C y B = D y recíprocamente.

Ejercicios

1) Sean los conjuntos:
B = {x: x $\in$ N, x múltiplo de 2, 0 < x < 8}.
C = {x: x $\in$ Q, $x(x^2 - 6) = 0$}
D = {x: x $\in$ N, $-x^2 + x + 20 > 0$}
a) Determinar los conjuntos B, C y D por extensión.
b) Hallar el conjunto $\mathcal{P}$(B).
c) Indicar si es verdadero o falso y justificar:
4 $\subset$ B; 4 $\in$ B; 3 $\notin$ C; {-4}$\subset$ D; $\varnothing \in$ D; $\varnothing \subset$ D; {0}$\subset$ C.

2) Se consideran los siguientes conjuntos:

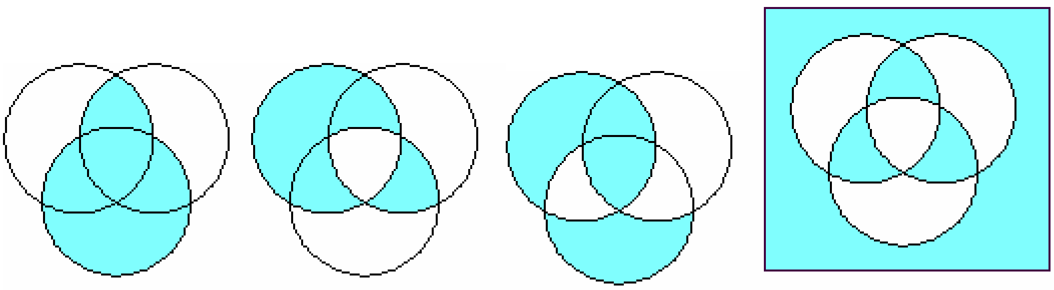
$E = \{x: x \in N, -x^2 + 5x \geq 0\}$; $A = \{x: x \in N^*, 2x + 7 < 25\}$;
$F = \{x: x \in N, x^2 \leq 0\}$.

a) Determinarlos por extensión.
b) Determinar por enumeración los conjuntos indicados:
1) $E - F$; 2) $E \cap F$; 3) $(E - F) \cup (F - E)$; 4) $A \cup E$, 5) $A \cup E \cup F$.
3) Sean los conjuntos: $A = \{x: x \in \Re, x \geq 4x - 3\}$,

$B = \{x: x \in \Re, 5 \geq x > -2\}$, $C = \{x/x \in \Re, x < 1\}$

i) Representar los conjuntos A, B, C en la recta real y escribirlos como intervalos.
ii) Hallar: $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cap B \cup C$; $C \cap B \cap A$; $A - B$; $C - A$.
iii) Escribe y representa en la recta los conjuntos $A'_{\Re}$; $B'_{\Re}$; $C'_{\Re}$.

4) Nombra los conjuntos y expresa en función de ellos las regiones pintadas:



5) En la Secretaría de un liceo se dispone de la siguiente información sobre 30 estudiantes: 15 estudian Química, 16 estudian Historia, 7 estudian Química y Francés, 9 estudian Francés e Historia, 5 Química e Historia, 3 Francés, Química e Historia.
Determinar el número de alumnos que:
1) estudian Francés,
2) estudian sólo Francés,
3) estudian Química pero no Historia,
4) estudian Francés pero no Química.

6) Un funcionario pasa el siguiente informe sobre un conjunto E de estudiantes: 36 estudian Inglés, 23 estudian Francés, 13 estudian Portugués, 6 estudian Inglés y Francés, 4 Francés y Portugués, 11 Inglés y Portugués y 1 estudia los tres idiomas. El informe fue rechazado por la dirección. ¿Por qué?

7) De tres conjuntos A, B y C se sabe que:
i) $C \subset (A \cup B)$, ii) $A \cap B \cap C$ tiene tres elementos, iii) $A \cap B$ tiene tres elementos, iv) $B \cap C$ tiene cinco elementos, v) $A \cap C$ tiene cuatro elementos, vi) A tiene 20 elementos, vii) $A \cup B$ tiene 35 elementos.

Hallar el cardinal del conjunto B y el del conjunto C.

8) A un conjunto P de personas se le realizó una encuesta sobre el uso de los jabones A, B y C. Se averiguó que: a) 6 personas usaron sólo uno de los tres jabones, b) los que usaron sólo C son la tercera parte de los que usaron sólo A y la mitad de los que usaron sólo B, c) 22 personas usaron por lo menos dos jabones, d) 8 usaron B ó C pero no A, e) 6 usaron B pero no C, f) 2 no usaron ninguno y 7 usaron los tres.

i) Realiza el diagrama representando los datos.
ii) ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

9) Sean $A = \{x \ / \ x \in N, \ (x^2 - 1)(8 - 6x + x^2) = 0\}$ y
$B = \{ x \ / \ x \in N, \ 2 \leq x \leq 6, \ x = 3\}$
a) Determinar por extensión: A, B, $A \times B$ y $B \times A$.
b) Determinar por extensión las siguientes relaciones:
$R_1: A \to B \ / \ (a, b) \in R_1 \leftrightarrow b < a$.
$R_2: A \to B \ / \ (a, b) \in R_2 \leftrightarrow a + b = 2$
$R_3: A \to B \ / \ (a, b) \in R_3 \leftrightarrow b - 1 < a$.
c) Diagramar y graficar las relaciones determinadas en la parte b).

10) Dados los conjuntos $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$ indicar cuáles de las siguientes relaciones son funciones de A en B, y en dicho caso, clasificarlas.
a) $R_1 = \{(a,3),(b,2),(a,4),(c,3),(d,1)\}$
b) $R_2 = \{(a,4),(b,3),(c,2)\}$
c) $R_3 = \{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3)\}$
d) $R_4 = \{(a,2),(b,4),(c,3),(d,1)\}$

11) Sea $f: A \to B \ / \ f(x) = \dfrac{x}{3} + 2$

con $A = \{x \ / \ x \in Z, \ x(x^2 - 9)(x^2 + 3x - 54) = 0\}$ y $B = \{-1,1,2,3,4,5,7,8\}$. a) f es función? en caso afirmativo clasificarla. b) Hacer el diagrama de f y el gráfico de f.
c) Determinar: D(f) y R(f).

12) Sea $f: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \ / \ f(x) = -x^2 + 1$.
1) a) Representarla gráficamente. B) Clasificarla.
2) Escribir como intervalos los conjuntos:
$A = \{x \ / \ x \in \mathfrak{R}, \ f(x) < 0\}$
$B = \{x \ / \ x \in \mathfrak{R}, \ f(x) \geq 1\}$
$c = \{x \ / \ x \in \mathfrak{R}, \ f(x) > 2\}$

13) 1) Sea $f: A \rightarrow G \ / \ f(x) = -3x - 6$, $A = \{13, 7/3, -2, 8\}$. Determinar por extensión un conjunto G para que la correspondencia f resulte una función inyectiva pero no sobreyectiva. Justifique y utilice un diagrama para representarla.
2) Se dan lo conjuntos: $A = \{13, 7/3, -2, 8\}$, $B = \{f(13), f(7/3), f(-2), f(8)\}$ de modo que: $f: A \rightarrow B \ / \ f(x) = -3x - 6$. Exprese por enumeración los conjuntos :
a) $A - B$; b) $B - A$; c) $(A - B) \cup (B - A)$; d) $A \cap (A - B)$; e) $B \cup A \cup \varnothing$.
3) De dos conjuntos E y F se sabe:

- El cardinal del conjunto E es a y $E \neq \varnothing$.
- El cardinal del conjunto F es b y $F \neq \varnothing$.
- $E \cap F \neq \varnothing$.

Indique si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones:

- Cardinal $(E \cup F) = a + b$
- Cardinal $(E \cup F) \leq a + b$
- Cardinal $(E \cup F) > a + b$

¿Cuál es el cardinal del conjunto $(E \cup F)$ si $(E \cap F) = \varnothing$

4) Determinar por enumeración los conjuntos $F = \{x: x \in Z, \ x^2 - 4 < 0\}$,
$G = \{x: x \in Z, \ 2x^2 - 98 = 0\}$ y $H = \{x: x \in N, \ 5 \leq x + 1 < 10\}$.