TEOREMA DE ROLLE:

H **f continua en [a,b]**
f derivable en (a,b)
f(a)=f(b)

T **$\exists c \in (a,b)$ / f '(c)=0**
(existe en el intervalo un punto de tangente horizontal ; el teorema no asegura la unicidad).

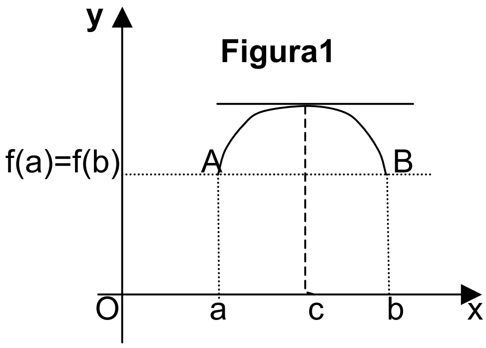


Figura1

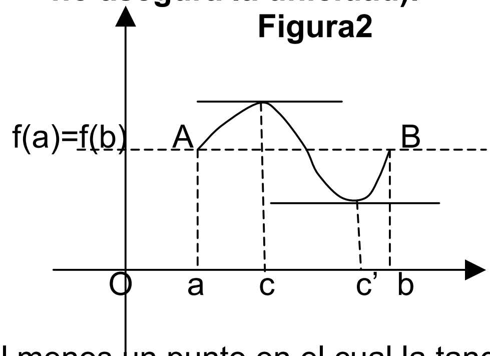


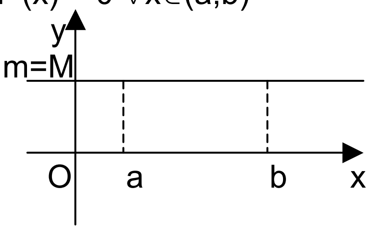
Figura2

Siendo A(a.f(a)) y B(b,f(b)), existirá al menos un punto en el cual la tangente sea // AB (en este caso horizontal)

<u>Demostración:</u>

Por H f cont. en [a,b] $\xrightarrow{\text{teo.W2}}$ $\exists$ máximo y mínimo absolutos (M y m) de f en [a,b], $m \leq M$

1) si m=M , como además $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow m=f(x)=M$ $\forall x \in [a,b]$ es decir que en este caso f es constante en [a,b], entonces: f '(x) = 0 $\forall x \in (a,b)$



2) si m < M consideremos a x_1 y $x_2 \in [a,b]$ / $f(x_1)=m$ y $f(x_2)=M$

$$\left.\begin{array}{l} \text{como } m=f(x_1)< f(x_2)=M \\ \text{por H : } \quad f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \text{ y } x_2 \text{ no pueden coincidir ambos con a o b (sería m=M), de modo que uno de los dos} \in (a,b)$$

Supongamos que sea $x_2 \in (a,b)$ (como en la figura 1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Existirá entonces un } E(x_2,\delta) \subset [a,b] \\ \text{Además } f(x_2)=M \text{ es máximo absoluto de f en } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \leq f(x_2) \ \forall x \in [a,b]$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{def.máx.relativo}} \text{f presenta un máx.relativo en } x_2 \\ x_2 \in (a,b) \xrightarrow{\text{por.H}} \text{f deriv.en } x_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{teo.anterior}} f'(x_2)=0 \text{ con } x_2 \in (a,b)$$

EJERCICIO: Sea $f: f(x) = L(-x^2 + ex + 1)$

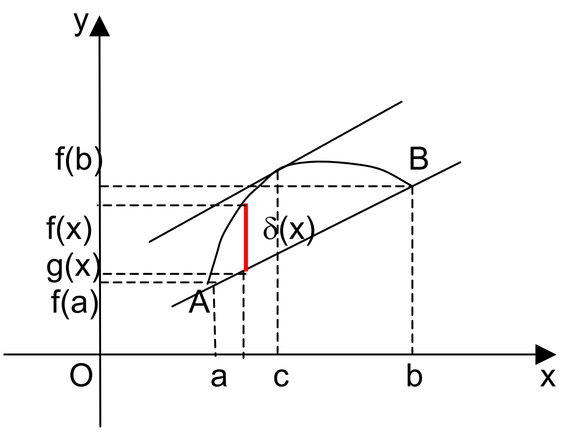
a) Investigar si $\exists c \in (1, e-1)$ tal que la gráfica de f en el punto (c,f(c)) presente tangente horizontal. Fundamentar.
b) Hallar c de la parte a) y graficar f en el intervalo [1,e-1]

TEOREMA DE LAGRANGE:

H **f continua en [a,b]**

f derivable en (a,b)

T $\exists c \in (a,b) \,/\, f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



f '(c) expresa la pendiente de la tangente a la gráfica de f en un punto (c,f(c)), mientras que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta AB. El teorema expresa, al igual que Rolle, que existe un punto en el cual la tangente es paralela a la recta AB. De modo que Lagrange es una generalización de Rolle.

Demostración:

Consideremos una función g auxiliar, cuya gráfica es la recta AB :

$$g: g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

.....y otra que expresa la diferencia entre f y g (función dada y recta AB):

$$\delta: \delta(x) = \quad f(x) - g(x) = \quad f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Veremos que es posible aplicar el teorema de Rolle a la función δ :

$$\left.\begin{array}{l} \text{f es cont. en [a,b] y derivable en (a,b) por H} \\ \text{g es cont. y derivable } \forall x \in \Re \text{ por ser polinómica} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(lineal)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{teos.cont.yderiv.suma}} \begin{array}{l} \delta \text{ cont. en [a,b] y} \\ \text{derivable en (a,b)} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\delta(a)= & f(a)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0 \\ \delta(b)= & f(b)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \delta(a)=\delta(b)$$

$$\xrightarrow{\text{por.teo.Rolle}} \quad \exists c \in (a,b) / \delta'(c)=0$$

Siendo $\delta'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \delta'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

$$\Rightarrow \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE LAGRANGE:

TEOREMAS:

1) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } f'(x)>0 \text{ en } (a,b) \\ f \text{ cont.en } [a,b]\end{array}\right\} \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en [a,b]

Demostración : Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ cualesquiera, con $x_1 < x_2$,

Tenemos que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Para ello aplicaremos a f el teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1, x_2]$,

Como dicho intervalo está incluido en el [a,b]:

f es cont. en $[x_1, x_2]$y deriv. en (x_1, x_2) por. H

$\Downarrow$ por teo de Lagrange

$$\left.\begin{array}{l}\exists c \in (x_1, x_2)/ f'(c)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0 \text{ por H} \\ \text{como además :} \quad x_2-x_1>0\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{regla.sig.}} f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1) \text{ lqqd.}$$

2) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } f'(x)=0 \text{ en } (a,b)\\ f \text{ cont.en } [a,b]\end{array}\right\} \Rightarrow$ f es constante (f(x)=k) en [a,b]

Demostración :

Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ cualesquiera, con $x_1 < x_2$,

Tenemos que demostrar que $f(x_1)=f(x_2)$.

Para ello aplicaremos a f el teorema de Lagrange en el intervalo $[x_1, x_2]$,

Como dicho intervalo está incluido en el [a,b]:

f es cont. en $[x_1, x_2]$ y deriv. en (x_1, x_2) por. H

$\Downarrow$ por teo de Lagrange

$$\left.\begin{array}{l}\exists c \in (x_1, x_2) / f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \text{ por H}\\ \text{como además : } \quad x_2 - x_1 > 0\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \; f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_2)=f(x_1)$ lqqd.

3) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } f'(x)=g'(x) \text{ en } (a,b)\\ f \text{ y } g \text{cont.en } [a,b]\end{array}\right\} \Rightarrow f-g$ es constante (f(x)=g(x)+k) en [a,b]

Para demostrar este teorema basta con aplicar el anterior a la función f-g

PRIMITIVA (INTEGRAL INDEFINIDA):

Si f y F son funciones tales que : $F'(x)=f(x)$,
se dice que **F es primitiva o integral indefinida de f.** Por el teorema anterior, cualquier otra primitiva de f difiere de F en una constante, de modo que el conjunto de primitivas de f son : F(x)+k, con k∈R, se escribe :

F(x) = $\int f(x)dx$

4) CONDICIÓN SUFICIENTE DE EXTREMO RELATIVO:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{sig}f'(x) \quad \underset{a-\delta}{(}\ + + + + \underset{a}{|}\ - - - \underset{a+\delta}{)} \longrightarrow x \\ \text{f cont. en a} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f tiene un máx. relativo en a}$$

Demostración :

Sea $x_1 \in E^*_-(a,\delta)$, probaremos que $f(x_1) < f(a)$
aplicando Lagrange en el intervalo $[x_1, a]$:

f es derivable en (x_1, a) pues en este intervalo (incluido en $E^*_-(a,\delta)$) :
f ’(x)>0 por H

f es derivable en $[x_1, a)$ por lo mismo $\xrightarrow{\text{teo.deriv}-\text{cont.}}$ f es cont. en $[x_1, a)$
por H f cont en a
$\Downarrow$
f cont. en $[x_1, a]$

$\xrightarrow{\text{por.teo.de Lagrange}}$

$$\exists c \in (x_1, a) / f'(c) = \frac{f(a) - f(x_1)}{a - x_1} > 0 \text{ por H}$$

como además : $\quad x_2 - x_1 > 0$

$\xrightarrow{\text{regla.sig.}}$ $f(a) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(a) > f(x_1)$ lqqd.

De igual forma, tomando un $x_2 \in E^*_+(a,\delta)$, puede probarse que $f(x_2) < f(a)$
aplicando Lagrange en el intervalo $[a, x_2]$:

$\xrightarrow{\text{por.def.máx.relativo.}}$ f tiene máx. relativo en a.