Liceo Nº3 Nocturno Matemática 6ºM 4 Prueba Sumativa 12/10/06 *Prof. Saúl Tenenbaum.*

Ejercicio 1) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1.1) $$\left.\begin{array}{l} f: f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} \\ g: g(\mathrm{x}) = L(1+4\mathrm{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathrm{x}) \sim g(\mathrm{x}) \quad para \quad \mathrm{x} \to 0$$

1.2) $$\left.\begin{array}{l} a:\ a(x) = e^{3x+4} \\ b:\ b(x) = e^{3x+5} \end{array}\right\} \Rightarrow a(x) \sim b(x) \quad para \quad x \to +\infty$$

1.3) $$j:\ j(x) = L(x^2 + a) \Rightarrow j(x)\ es\ continua\ \forall x,\ x \in \mathbb{R},\ \forall a,\ a \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2) Se considera la función h :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{-3x+9} & \mathrm{x}>3 \\ a & \mathrm{x}=3 \\ b.\dfrac{e^x - e^3}{5x-15} & \mathrm{x}<3 \end{cases}$$

Hallar a y b para que h sea una función continua $\forall x \ , x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3)

a)Calcular k de modo que la asíntota oblicua de la función g pase por el origen.

b) Indicar cuál es dicha asíntota.

c) Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{g}(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{g}(x)$ siendo $g: g(x) = (3x+k).e^{-\frac{2}{x}}$

Ejercicio 4) Calcular $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}^2 - 7x + 12}$ y representar gráficamente.

Ejercicio 5) Sea $g:\ \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \dfrac{2\mathrm{x}+19}{\sqrt{-\mathrm{x}^2 + bx + c}}$

Hallar **b** y **c** sabiendo que las rectas **x = -2** y **x = 7** son asíntotas verticales en la representación gráfica de la función g. Calcular también las otras asíntotas, si las hay.

Liceo Nº3 Nocturno Matemática 6ºM 4 Prueba Sumativa 12/10/06 *Prof. Saúl Tenenbaum.*

Solución:

1.1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4x}{L(1+4x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.(x+4)}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+4}{4}=\dfrac{4}{4}=1\Rightarrow$ Si. Son equivalentes.

1.2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x+4}}{e^{3x+5}}=\lim\limits_{x\to 0} e^{(3x+4)-(3x+5)}=e^{-1}\neq 1\Rightarrow$ No. No son equivalentes.

1.3) No. Contraejemplo: Si **a = -29**, cuando **x = 3** la función no existe. Entonces, es falso. En realidad, sólo para **a>0** es cierto. Para valores de **a** negativos o cero no es cierto. Entonces para cualquier valor real de a no es continua.

---

2)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{-3x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3).(x+3)}{-3.(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{-3}=-2$$

$$f(3)=a$$

$$\lim_{x\to 3} b.\frac{e^x-e^3}{5x-15}=\lim_{x\to 3} b.\frac{e^3(e^{x-3}-1)}{5.(x-3)}=\lim_{x\to 3} b.\frac{e^3(x-3)}{5.(x-3)}=b.\frac{e^3}{5}$$

Para que la función sea continua en todos los números reales, también tiene que ser continua en x = 3, entonces tienen que ser :

$$\boxed{-2=a} \quad y \quad -2=b.\frac{e^3}{5}\Leftrightarrow \boxed{b=\frac{-10}{e^3}}$$

---

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\underbrace{(3x+k)}_{\to\pm\infty}.\underbrace{e^{-\frac{2}{x}}}_{\to 1}=\pm\infty$ Recordemos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{x}=0^{\pm}$ $y\ que$ $e^0=1$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(3x+k).e^{-\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(3x).e^{-\frac{2}{x}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(3).e^{-\frac{2}{x}}=3$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\pm\infty}(3x+k).e^{-\frac{2}{x}}-3x=\lim_{x\to\pm\infty}3x.e^{-\frac{2}{x}}+k.e^{-\frac{2}{x}}-3x=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}3x.(e^{-\frac{2}{x}}-1)+k.e^{-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}3x.\left(\frac{-2}{x}\right)+k.e^{-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}3.(-2)+k.\underbrace{e^{-\frac{2}{x}}}_{\to 1}=-6+k$$

Entonces la asíntota quedó así: $y = m.x + n$ $y = 3x + (-6 + k)$
Para que una recta pase por el origen de coordenadas, su termino independiente tiene que ser cero.
En este caso el término independiente de la asíntota es $-6 + k$ entonces tiene que ser $-6 + k = 0$.
Entonces $k = 6$. La asíntota es $y = 3x$. [¿ Necesita un repaso de función lineal ?]

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x-1}{\underbrace{x^2 - 7x + 12}_{\to 0^-}} = -\infty$$

4) *porque el signo de* $x^2 - 7x + 12$ *es* : $\boxed{+ + + +\ \ 3\ \ - - - - - -\ \ 4\ + + + + +}$

entonces en 3^+ *el signo es* $-$.

---

5) $g:\ g(x) = \dfrac{2x+19}{\sqrt{-x^2 + bx + c}}$ Para que haya asíntota vertical en las funciones donde tenemos un cociente, el denominador tiende a cero y el cociente a infinito.
Entonces -2 y 7 son raíces del denominador.

$$-(-2)^2 + b.(-2) + c = 0$$

$$-(7)^2 + b.(7) + c = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, queda: $b = 5$ y $c = 14$.

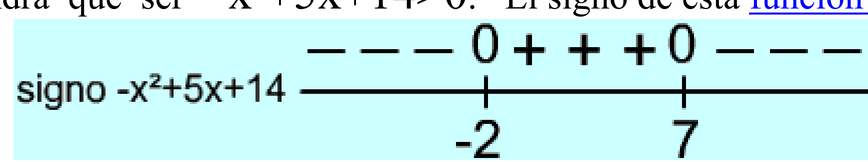
[¿Precisa ayuda para resolver un sistema de ecuaciones?]

Y con respecto a si hay mas asíntotas, primero vamos a ver la existencia.
¿Cuál será el dominio de esta función ?

$\sqrt{w(x)}$ *existe cuando* $w(x) \geq 0$

$\dfrac{73x + 14}{\sqrt{w(x)}}$ *existe cuando* $w(x) > 0$ *porque no puede ser* $w(x)$ *igual a cero.*

Entonces tendrá que ser $-x^2+5x+14>0$. El signo de esta [función cuadrática] es:



Entonces esta función g(x) sólo existe entre -2 y 7. Esto es, el dominio de la función es el intervalo abierto (-2,7). Por conclusión no tiene asíntotas oblicuas porque no existe en el infinito.
No se puede calcular el límite para x tendiendo a mas o menos infinito porque no existe la función.