

## POLINOMIOS

### Definición: Función Polinómica.

- Función Polinómica  $f$  es toda función de dominio el conjunto de los números reales, tal que la imagen de cada número real  $x$  es:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ donde } a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \text{ son números reales y } n \text{ es natural.}$$

### Definición: Polinomio.

- Polinomio de variable real  $x$ , es toda expresión de la forma:

$$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ donde } a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \text{ son números reales y } n \text{ es natural.}$$

### OBSERVACIONES:

- Se puede decir que el polinomio  $P(x)$  es el medio para calcular el número  $f(x)$ .
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  se denominan **coeficientes** del polinomio.
- el subíndice  $i$  de  $a_i$  indica que  $a_i$  es el coeficiente de  $x^i$  ( $i$  es un natural que varía entre 0 y  $n$ )

### Ejemplo:

$P(x) = -8x^3 + 6x - \frac{1}{2}$  es un polinomio ordenado según la variable  $x$ , cuyos coeficientes son:

$$a_0 = -\frac{1}{2}, a_1 = 6, a_2 = 0, a_3 = -8, a_4 = a_5 = \dots = 0,$$

- Definición: Llamaremos VALOR NUMÉRICO de un polinomio  $P(x)$  con respecto a un número real  $\alpha$  al número que se obtiene luego de efectuar operaciones en  $P(x)$  cuando se sustituye la variable  $x$  por  $\alpha$ . (notaremos  $P(\alpha)$ ).

### Ejemplo:

$$P(x) = -3x^4 + 6x^3 - 2x^2 + x - 2, \text{ calculemos } P(1) \text{ y } P(-2)$$

$$P(1) = -3(1)^4 + 6(1)^3 - 2(1)^2 + 1 - 2 = -3 + 6 - 2 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow P(1) = 0$$

$$P(-2) = -3(-2)^4 + 6(-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2) - 2 = -3 \cdot 16 + 6(-8) - 2 \cdot 4 - 2 - 2 = -48 - 48 - 8 - 4 = -108$$

### Definición: Raíz de P(x).

$$\alpha \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

- En el ejemplo anterior observamos que  $P(1) = 0$ , por lo tanto  $x = 1$  es raíz de  $P(x)$ .

### Definición: Grado de un polinomio.

El grado de  $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , es el mayor  $i$  natural tal que  $a_i \neq 0$ .

Notación:  $\text{gr}[P(x)] = n, a_n \neq 0, a_n$  se denomina coeficiente principal.

### Ejemplo:

$$- P(x) = -3x^4 + 6x^3 - 2x^2 + x - 2, \Rightarrow \text{gr}[P(x)] = 4, \text{ y el coef. principal es } a_4 = -3$$

$$- Q(x) = 5 \Rightarrow \text{gr}[Q(x)] = 0$$

$$- T(x) = 6x + 1 \Rightarrow \text{gr}[T(x)] = 1$$

### Definición: Polinomio Nulo.

$$\theta(x) \text{ es el Polinomio Nulo } \Leftrightarrow a_i = 0 \forall i, i \in \mathbb{N}$$

- No existe el grado del polinomio nulo.
- El polinomio nulo admite infinitas raíces.

**Definición: Polinomios Idénticos.**

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad y \quad Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

$$P(x) \text{ es idéntico a } Q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, i \in \mathbb{N}$$

- Es decir, dos polinomios son idénticos si, tienen igual grado, y además los coeficientes de los términos del mismo grado sean iguales.
- **Observación:**
- Si dos polinomios son idénticos, sus valores numéricos son iguales para cualquier x real.

**OPERACIONES CON POLINOMIOS.**

**Definición: SUMA DE POLINOMIOS:**

$$\text{Sean } P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad y \quad Q(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

$$\text{La suma de } P(x) \text{ y } Q(x) \text{ es } S(x) = \sum_{i=0}^{i=m} (a_i + b_i) x^i \text{ siendo } m = \max\{n, k\}$$

- S(x) por su forma es un polinomio cuyos coeficientes son los reales  $(a_i + b_i)$ . Esto significa que cada coeficiente del polinomio S(x) se obtiene sumando los coeficientes de los términos semejantes, es decir, los términos de igual grado.

**Definición: Polinomios opuestos.**

Sea  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , el polinomio opuesto de P(x) es

$Q(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$ . Notación: el polinomio opuesto de P(x) lo notaremos  $-P(x)$ .

**Definición: Diferencia de Polinomios:**

Dados los polinomios P(x) y Q(x),  $D(x) = P(x) - Q(x) \Leftrightarrow D(x) + Q(x) = P(x)$ . Al polinomio D(x) lo llamamos diferencia entre P(x) y Q(x) y - es la sustracción entre polinomios.

**Definición: PRODUCTO DE POLINOMIOS:**

Dados los polinomios  $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  y  $B(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ , el producto A(x).B(x) es  $P(x) = \sum_{i=0}^{i=n+p} c_i x^i$ , donde los coeficientes  $c_i = \sum_{j=0}^{j=i} a_{i-j} b_j$ .

**Algunas consecuencias:**

1) La multiplicación de polinomios es un único polinomio.

$$2) \left. \begin{array}{l} gr[A(x)] = m \\ gr[B(x)] = n \end{array} \right\} \Rightarrow gr[A(x).B(x)] = m + n$$

$$3) P(x).\theta(x) = \theta(x) \quad y \quad P(x).1 = P(x)$$

### Definición: DIVISIÓN ENTERA

#### - Definición: División Entera.

Dados los polinomios  $A(x)$  y  $D(x)$  no nulo, el cociente  $Q(x)$  y el resto  $R(x)$  de la división  $A(x)$  por  $D(x)$  verifican:

$$1^\circ) A(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$2^\circ) gr[R(x)] < gr[D(x)] \text{ o } R(x) = \theta(x)$$

Los polinomios  $A(x)$  y  $D(x)$  se denominan dividendo y divisor, respectivamente.

- Nota: Admitiremos el esquema de división:

$$\begin{array}{r} A(x) \\ R(x) \end{array} \left| \begin{array}{r} D(x) \\ Q(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow A(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

- Observaciones:

1) El cociente y el resto de una división son únicos.

2) En el caso en que  $R(x) = \theta(x)$  decimos:

-  $D(x)$  divide a  $A(x)$ .

-  $A(x)$  es divisible por  $D(x)$ .

-  $A(x)$  es múltiplo de  $D(x)$ .

- La división  $A(x)$  por  $D(x)$  es exacta.

$$3) gr[A(x)] \geq gr[D(x)] \Rightarrow gr[Q(x)] = gr[A(x)] - gr[D(x)]$$

#### División por $(x - \alpha)$

- Sea un polinomio  $P(x)$  dividido por  $(x - \alpha)$ . Es decir

$$\begin{array}{r} P(x) \\ R(x) \end{array} \left| \begin{array}{r} x - \alpha \\ Q(x) \end{array} \right.$$

Por definición  $gr[R(x)] < gr(x - \alpha) \Rightarrow$  Si  $R(x)$  no es el polinomio nulo, el grado del resto es cero.

Este es el motivo por el cual simbolizaremos a  $R(x)$  con  $r$ ,  $r$  real.

- El grado del polinomio cociente es la diferencia entre los grados de los polinomios dividendo y divisor. Llamando  $n$  al grado del polinomio dividendo tenemos que  $gr[Q(x)] = n - 1$ .

- El coeficiente principal de  $Q(x)$  es igual al coeficiente principal de  $A(x)$  pues surge de dividir este último por 1, ya que, en esta división, 1 es el coeficiente principal del divisor.

Esquemmatizando:

$$\begin{array}{r} A(x) \\ R(x) \end{array} \left| \begin{array}{r} D(x) \\ Q(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow A(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + r$$

#### Esquema de Ruffini.

- Muchas veces para resolver determinados problemas es útil un algoritmo conocido como "Esquema de Ruffini"<sup>1</sup>

Hallaremos el cociente y resto de dividir  $A(x) = 5x^4 + 7x^3 - 21x^2 + 6$  por  $B(x) = x - 2$ .

	5			-21	0	6
				34	26	52
			17	13	26	58

MULTIPLICAR

SUMAR

<sup>1</sup> Paolo Ruffini (1765-1822)- Matemático Italiano.

El cociente es  $Q(x) = 5x^3 + 17x^2 + 13x + 26$  y el resto es  $R(x) = 58$

- ¿Cómo usar el esquema de Ruffini cuando el divisor es  $mx + n$ ,  $m \neq 0$  y  $m \neq 1$ ?

Tratemos de transformar este problema, en uno ya visto.

$$A(x) = (mx + n) \cdot Q(x) + r \Rightarrow A(x) = \left(x + \frac{n}{m}\right) \cdot \underbrace{m \cdot Q(x)}_{C(x)} + r \text{ Con lo cual realizamos una "nueva"}$$

división:  $A(x)$  por  $\left(x + \frac{n}{m}\right)$ , obteniendo un cociente  $C(x)$  y resto  $r$ .

$$\begin{array}{r} A(x) \\ \hline x + n/m \\ \hline r \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \hline C(x) \end{array}$$

Por lo tanto:

1) Como  $m \cdot Q(x) = C(x)$ , para hallar los coeficientes de  $Q(x)$ , basta con dividir cada uno de los  $c_i$  por  $m$ .  $Q(x) = \frac{1}{m} C(x)$

2) El resto de esta nueva división, es el resto de dividir  $A(x)$  por  $mx + n$

$$\begin{array}{r} A(x) \\ \hline mx + n \\ \hline r \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \hline \frac{1}{m} \cdot C(x) \end{array}$$

- Halleemos el cociente y resto de dividir  $A(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 2$  por  $B(x) = 3x + 5$ .

	3	-1	5	2
$-\frac{5}{3}$		-5	10	-25
	3	-6	15	-23

Por lo tanto:  $Q(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 6x + 15) \Rightarrow Q(x) = x^2 - 2x + 5$  y  $r = -23$

### LEY DEL RESTO

El resto de dividir un polinomio  $A(x)$  por  $x - \alpha$  es el número  $A(\alpha)$ .

Por H,  $A(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + r$

Calculemos  $A(\alpha)$ :

$$A(\alpha) = \underbrace{(\alpha - \alpha)}_{=0} \cdot Q(\alpha) + r = 0 \cdot \overset{\in \mathbb{R}}{Q(\alpha)} + r = 0 + r = r \Rightarrow \boxed{A(\alpha) = r}$$

- Observación:

### TEOREMA DE DESCARTES

La condición necesaria y suficiente para que  $P(x)$  sea divisible por  $x - \alpha$  es que,  $\alpha$  sea raíz de  $P(x)$ .

$$\boxed{P(x) \text{ es divisible por } (x - \alpha) \Leftrightarrow \alpha \text{ es raíz de } P(x)}$$

$$P(x) \text{ es divisible por } (x - \alpha) \underset{\substack{\Leftrightarrow \\ \text{def. de} \\ \text{polinomio} \\ \text{divisible}}}{\Leftrightarrow} \text{El resto de dividir } P(x) \text{ por } (x - \alpha) \text{ es } 0 \underset{\substack{\Leftrightarrow \\ \text{Ley del Resto}}}{\Leftrightarrow} P(\alpha) = 0 \underset{\substack{\Leftrightarrow \\ \text{Def. de} \\ \text{Raíz}}}{\Leftrightarrow} \alpha \text{ es raíz de } P(x).$$

Notas:

- El dato  $S(x)$  es divisible por  $x - \alpha$  nos indica que el resto de la división es cero.
- Esta propiedad relaciona la división con las raíces de un polinomio.

### TEOREMA

$$\boxed{\alpha \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow \alpha \text{ es raíz de } D(x) \text{ o } \alpha \text{ es raíz de } Q(x)}$$

Es decir, si  $P(x)$  es divisible por  $D(x)$ :

- las raíces de  $P(x)$  son raíces del divisor o del cociente.
- las raíces del divisor y del cociente son raíces de  $P(x)$ .

### TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Todo polinomio de grado  $n, n \neq 0$ , con  $k$  raíces reales y distintas dos a dos  $k \leq n$ , puede expresarse como el producto de  $k$  binomios de la forma “ $x - \text{raíz}$ ” multiplicado por un polinomio de grado  $n-k$ .

Para comprender mejor la demostración, haremos la misma para un polinomio de tercer grado, teniendo en cuenta que la misma es análoga para un polinomio de grado  $n$ .

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, a_3 \neq 0. \\ \text{Sean } \alpha, \beta, \gamma \text{ raíces de } P(x) \text{ distintas dos a dos} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists Q(x) \text{ y } Q(x) = a_3 / P(x) = a_3(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

Dem :

$$1) P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists Q_1(x) / P(x) = (x - \alpha)Q_1(x) \quad (1)$$

T. Descartes

$$2) \beta \text{ raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(\beta) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} P(\beta) = \underbrace{(\beta - \alpha)}_{\neq 0} Q_1(\beta) \\ \Rightarrow Q_1(\beta) = 0 \Leftrightarrow Q_1(x) = (x - \beta)Q_2(x) \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1(x) = (x - \beta)Q_2(x)$$

T. Descartes

$$\text{Sustituyendo en (1): } P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q_2(x) \quad (2)$$

$$3) \gamma \text{ raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(\gamma) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} P(\gamma) = \underbrace{(\gamma - \alpha)}_{\neq 0} \underbrace{(\gamma - \beta)}_{\neq 0} Q_2(\gamma) \\ \Rightarrow Q_2(\gamma) = 0 \Leftrightarrow Q_2(x) = (x - \gamma)Q_3(x) \end{array} \right\} \Rightarrow Q_2(x) = (x - \gamma)Q_3(x)$$

T. Descartes

$$\text{Sustituyendo en (2): } P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)Q_3(x)$$

Como  $\text{gr}[P(x)] = \underbrace{\text{gr}[(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)]}_{=3} + \text{gr}[Q_3(x)]$ , deducimos que  $\text{gr}[Q_3(x)] = 0 \Rightarrow Q_3(x) = h, h \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Por lo tanto: } a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = h(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = h}$$

Id. de Polinomios

$$\Rightarrow P(x) = a_3(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

#### Observaciones:

1) Si  $n > k$  y  $\alpha_i$  raíces distintas entre sí, ( $i \leq k$ )

$$P(x) = \underbrace{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k)}_{\text{Descomposición factorial de } P(x)} \cdot Q(x) \quad \text{gr}[Q(x)] = n - k$$

2) Un polinomio de grado “ $n$ ” no tiene más de  $n$  raíces reales diferentes.

- Notemos que las propiedades anteriores, excluyen la posibilidad de que algunas raíces sean iguales. Para contemplar esta posibilidad, definiremos *orden de multiplicidad de una raíz* (raíz múltiple).

#### - Definición:

Sea  $P(x)$  no nulo. El natural  $m$  es el orden de multiplicidad de la raíz  $\alpha$  en  $P(x) \Leftrightarrow \exists Q(x) / P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x)$  y  $Q(\alpha) \neq 0$ .

Por lo tanto, si  $P(x)$  no es el polinomio nulo, y admite raíces múltiples distintas, la descomposición

$$\text{factorial de } P(x) \text{ sera la expresión: } P(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdot (x - \alpha_2)^{m_2} \dots (x - \alpha_k)^{m_k} \cdot Q(x)$$

$$Q(\alpha_i) \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}^*, i \leq k \text{ y además } \text{gr}[P(x)] = m_1 + m_2 + \dots + m_k + \text{gr}[Q(x)]$$

### TEOREMA De Identidad de Polinomios

Sean dos polinomios  $A(x)$  y  $B(x)$ . Si los valores numéricos  $A(\alpha)$  y  $B(\alpha)$  son iguales para cualquier real  $\alpha$ , se tiene que  $A(x)$  es idéntico a  $B(x)$ .

## RAÍCES DE UN POLINOMIO

### Raíces particulares de un polinomio.

- 0 es raíz de un polinomio si y sólo si el término independiente es cero.
- 1 es raíz de un polinomio si y sólo si la suma de los coeficientes es cero.
- -1 es raíz de un polinomio si y sólo si la suma de los coeficientes de los términos de grado par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de grado impar.

### Raíces comunes:

- Definición: Combinación lineal de polinomios:

Sean  $P(x)$  y  $Q(x)$  polinomios,  $a$  y  $b$  números reales cualesquiera. Al polinomio  $L(x) = a.P(x) + b.Q(x)$  le llamamos *combinación lineal* de  $P(x)$  y  $Q(x)$ .

### Observaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \alpha \text{ es raíz de } P(x) \\ \alpha \text{ es raíz de } Q(x) \\ L(x) = a.P(x) + b.Q(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es raíz de } L(x).$$

Es decir, si  $\alpha$  es raíz de dos polinomios,  $\alpha$  es raíz de cualquier combinación lineal entre ellos.

$$\left. \begin{array}{l} 2) \left. \begin{array}{l} P(x) \quad D(x) \\ \hline R(x) \quad Q(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es raíz de } R(x) \\ \alpha \text{ es raíz de } P(x) \\ \alpha \text{ es raíz de } D(x) \end{array} \right\}$$

## ❖ RELACIONES ENTRE COEFICIENTES Y RAÍCES.

### POLINOMIO DE PRIMER GRADO:

Sea  $P(x) = a_1x + a_0$ ,  $a_1 \neq 0$  y  $\alpha$  raíz de  $P(x)$ .

$$\text{Por D.F.} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(x) = a_1(x - \alpha) = a_1x - a_1\alpha \\ P(x) = a_1x + a_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{id. de} \\ \Rightarrow \\ \text{polinomios} \end{array} -a_1\alpha = a_0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{a_0}{a_1}}$$

### POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO:

Sea  $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ,  $a_2 \neq 0$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  raíces de  $P(x)$ .

$$\text{Por D.F.} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(x) = a_2(x - \alpha)(x - \beta) = a_2x^2 - a_2(\alpha + \beta)x + a_2\alpha\beta \\ P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{id. de} \\ \Rightarrow \\ \text{polinomios} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -a_2(\alpha + \beta) = a_1 \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{a_1}{a_2} \\ a_2\alpha\beta = a_0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \frac{a_0}{a_2} \end{array} \right.$$

### POLINOMIO DE TERCER GRADO:

Sea  $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ,  $a_3 \neq 0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  raíces de  $P(x)$ .

Utilizando un razonamiento análogo tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{a_2}{a_3} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{a_1}{a_3} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{a_0}{a_3} \end{array}}$$

☞ Casos que se reducen a ecuaciones de segundo grado.

- Polinomios Ciclotónicos.

Son de la forma:  $P(x) = ax^{2n} + bx^n + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

Ejemplo: Si  $n = 1$ :  $P_1(x) = ax^2 + bx + c$

Si  $n = 2$ :  $P_2(x) = ax^4 + bx^2 + c$  (polinomio bicuadrado)

Si  $n = 3$ :  $P_3(x) = ax^6 + bx^3 + c$  (polinomio bicubico)

Para hallar las posibles raíces reales de cualquier polinomio ciclotonico,

debemos resolver la ecuacion:  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$  (1), que podemos escribir asi:  $a(x^n)^2 + bx^n + c = 0$ ,

Si sustituimos:  $\boxed{x^n = z} \rightarrow az^2 + bz + c = 0$  (2). Aplicamos un cambio de variable; esta transformacion es ventajosa pues llevamos la ecuacion (1) que no sabemos resolver, a la ecuacion (2) de resolucion conocida.

- Polinomios Simétricos.

Un polinomio es simétrico si y sólo si los coeficientes de los términos “equidistantes” de los extremos, son iguales: Por ejemplo, un polinomio simetrico de:

grado 5 es:  $A(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$

grado 4 es:  $B(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$

(!) En todo polinomio simétrico se cumple que:

- No admiten la raíz 0.
- -1 es raíz, si el grado es impar.
- Si admite raíz  $\alpha$ , también la raíz  $1/\alpha$ .
- Si es de grado impar, al dividirlo por  $(x+1)$ , obtenemos un polinomio simétrico.

- Raíces de polinomios simétricos de 4º grado.

Para hallar las posibles reales de un polinomio simetrico de 4º grado:  $S(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ , resolvemos la ecuacion:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$  (1). Transformemos (1) en una ecuacion que nos permita saber cual es el cambio de variable conveniente.

Como (1) no admite raíz 0, tenemos que:  $x^2 \left( ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} \right) = 0$ , por lo tanto,  $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow$

$a \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left( x + \frac{1}{x} \right) + c = 0$  (2). Si en esta ultima expresion, efectuamos el cambio de variable:  $\boxed{x + \frac{1}{x} = z}$ ,

nos queda  $z^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , entonces realizando la sustituyendo en (2) obtenemos:  $a(z^2 - 2) + bz + c = 0$ , que ordenando

segun  $z$ :  $\boxed{az^2 + bz + c - 2a = 0}$  (3). Esta ecuacion admite, a lo sumo, dos raíces reales distintas:  $z_1$  y  $z_2$ .

Entonces, "deshaciendo" el cambio de variable efectuado:  $x + \frac{1}{x} = z_1 \Rightarrow x^2 + 1 = z_1x \Leftrightarrow x^2 - z_1x + 1 = 0$  (4)

y  $x + \frac{1}{x} = z_2 \Rightarrow x^2 + 1 = z_2x \Leftrightarrow x^2 - z_2x + 1 = 0$  (5).

Cada una de las ecuaciones (4) y (5) admiten, a lo sumo dos raíces reales distintas, que son las raíces de la ecuación (1). Por lo tanto:

$$\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \xleftarrow[\frac{1}{x}]{\text{Cambio de Variable}} az^2 + bz + (c - 2a) = 0}$$

- Polinomios Hemisimétricos:

Un polinomio es hemisimétrico si y solo si, los coeficientes de los términos “equidistantes” de los extremos son opuestos.

**Observaciones:** 1) No admiten la raíz 0. 2) 1 es raíz, si el grado es impar. 3) Si admite la raíz  $\alpha$ , también admite la raíz  $1/\alpha$ .

4) Si el grado es impar, al dividirlo por  $(x-1)$  obtenemos un polinomio simétrico.

Repartido Practico 4 – Matemática 5º H – POLINOMIOS

1) Sean  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 9$  y  $Q(x) = -x^4 - 5x^3 - 3x + 1$ , calcular:

$$P(1), P(-1), P(0), P\left(-\frac{2}{3}\right), P(1,42), Q(-2), Q\left(\frac{1}{2}\right), Q(-1), Q(0).$$

2) a) Dado  $P(x) = 3x^3 + mx^2 - x + 8$ , hallar  $m$  sabiendo que  $P(1) = 6$ .

b) Dado  $Q(x) = 4x^3 + (3a-1)x^2 + (1-2a)x - 9$ , hallar  $a$  sabiendo que  $Q(2) = 1$

c) Dado  $H(x) = -2x^3 + 2ax^2 - bx + 6$ , hallar  $a$  y  $b$  sabiendo que  $H(-1) = 11$  y que el valor numerico de  $H$  para  $x=2$  es  $-28$ .

3) Dado  $P(x) = (a+1)x^2 + bx - 3$ .

a) Discutir segun  $a$  y  $b$  el grado de  $P(x)$ .

b) Determinar un posible  $a$  y  $b$  para que  $x=3$  sea raiz de  $P(x)$ .

3) Sea  $F(x) = ax^2 + bx + c$ .

i) Determinar  $a, b$  y  $c$  sabiendo que  $F(0) = -2, F(-1) = -3$  y  $-2$  es raiz de  $F(x)$ .

ii)  $i - \frac{1}{2}$  es raiz de  $F(x)$ ?

iii) Calcular  $F(1) - F(-3)$ .

iv) Representar graficamente  $F(x)$  e indicar su signo.

4) Dados:  $A(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1 - x$ ,  $B(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ ,  $C(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}x + 1$  y  $D(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 3$

Calcular: i)  $A(x) + B(x) + C(x)$  ii)  $A(x) - C(x) + D(x)$  iii)  $(A(x) \cdot B(x)) - (C(x) \cdot D(x))$  iv)  $A(x) : D(x)$

5) En cada caso hallar el valor de  $k$  sabiendo que:

i)  $A(x) = kx^2 - 5x + 2$  es divisible por  $(x-1)$ . ii)  $B(x) = kx^3 - (k+2)x^2 - 4x + 2k$  es divisible por  $(x+2)$

iii)  $J(x) = k^2x^2 - 3kx - 4$  es divisible por  $x-1$ . vi)  $C(x) = (3k-1)x^3 + (2k+2)x + (1-k)$  es un polinomio de primer grado.

v)  $Z(x) = (3k-1)x^3 + (2k+2)x + (1-k)$  admite raiz  $-1$ . vi)  $L(x) = (3k-1)x^3 + (2k+2)x + (1-k)$  toma el valor  $24$  para  $x=-2$ .

6) Aplicando el esquema de Ruffini, hallar cociente y resto de:

a)  $(7x^2 - 5x + 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

b)  $(8x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1) : (x-1)$

c)  $(2x^5 - 5x^3 - 8x + 2) : (2x+3)$

7) Dado  $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + ax - 5$ , determinar  $a$  para que  $P(x)$  dividido por  $(x+2)$  tenga resto  $1$ .

8) Dado  $P(x) = 2x^2 + 4x + m$ , determinar  $m$  para que  $P(x)$  sea divisible por  $(x-2)$ .

9) Dado  $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ , determinar  $a$  y  $b$  para que  $P(x)$  dividido por  $(x-3)$  tenga resto  $54$  y dividido por  $(x+2)$  tenga resto  $-11$ .

10) Dado  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b$ , determinar  $a$  y  $b$  para que  $P(x)$  tenga raiz  $-1$  y que dividido por  $(x+2)$  tenga resto igual al termino independiente de  $P(x)$ .

11) Dado  $P(x) = 2x^4 - ax^3 + bx^2 - 3x + 2$ , determinar  $a$  y  $b$  para que  $P(x)$  dividido por  $(x-1)$  de resto  $2$  y para que el cociente de esa division dividido entre  $(x-2)$  tenga resto  $22$ .

12) Se sabe que  $P(x)$  es divisible por  $(x-2)$  y que  $P(x)$  dividido por  $(x+3)$  da resto  $-5$ . Calcular el resto de dividir  $P(x)$  por  $(x-2)(x+3)$ .

13)  $P(x)$  dividido por  $(x+1)$  da resto  $4$ ,  $P(x)$  dividido por  $(x+2)$  da resto  $1$  y  $P(x)$  dividido por  $(x-2)$  da resto  $-2$ . Calcular el resto de dividir  $P(x)$  por  $(x+1)(x+2)(x-2)$ .

14) Hallar  $m, n, a, b$  y  $c$  tal que:  $x^4 + mx^3 + 3x^2 + nx + 4 = (ax^2 + bx + c)(x^2 - x + 2)$ .

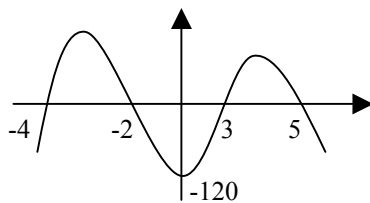
15) Dado  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + ax + b$ . Hallar  $a$  y  $b$  para que  $P(x)$  sea divisible por  $x^2 + x + 1$ .

16) Dado  $P(x) = 9x^4 - 12x^3 - ax^2 + 4x + b$ . Hallar  $a$  y  $b$  para que  $P(x)$  sea un cuadrado perfecto de coef. principal positivo.

17) Hallar  $m, n, p$  y  $q$  sabiendo que:  $3x^3 - 5x^2 - 7x + 1 = m(x-1)^3 + n(x-1)^2 + p(x-1) + q$

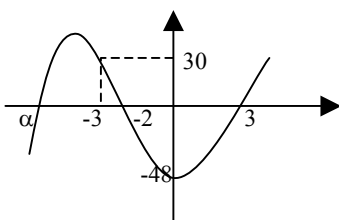
18) Hallar  $A(x)$  de tercer grado si se sabe que  $A(-1) = 2 \cdot A(0)$  y ademas  $A(x-1) - A(x) = 6x^2 + 2x - 7$ .

- 19) Hallar todas las raíces de  $P(x) = 36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ , sabiendo que una raíz es igual a la suma de las otras dos.
- 20) Resolver  $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$  si se sabe que dos de las raíces son opuestas.
- 21) Hallar todas las raíces de  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ , sabiendo que el producto de dos de sus raíces es -1.
- 22) Resolver  $16x^3 + 76x^2 - 225 = 0$ , sabiendo que una raíz es igual al producto de las otras dos.
- 23) Dado  $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ . Resolver  $P(x) = 0$  si las raíces están en progresión aritmética.
- 24) Resuelve y halla  $a$  en:  $x^3 + 4x^2 + 2x + a = 0$ , si el producto de dos de sus raíces es -1.
- 25) Dado  $P(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + a$ . i) Hallar  $a$  para que una de las raíces sea el doble de la otra, con  $a \in \mathbb{Z}$ , y para ese valor de  $a$ , resuelve  $P(x) = 0$ .
- 26) Resuelve:  $105x^3 + 37x^2 - 40x + a = 0$  si  $\alpha + \beta = -\frac{1}{15}$ .
- 27) Resuelve:  $21x^3 + ax^2 - 97x - 30 = 0$  si  $\alpha \cdot \beta = -\frac{10}{21}$ .
- 28) Hallar todas las raíces de  $A(x)$  y  $B(x)$  sabiendo que tienen raíces comunes.
- a)  $A(x) = 5x^3 + 8x^2 - 27x - 18$  y  $B(x) = 15x^3 + 16x^2 - 89x - 6$
- b)  $A(x) = x^4 - 9x^3 + 19x^2 + 9x - 20$  y  $B(x) = x^3 - 6x^2 - 7x + 60$
- 29) Dado  $P(x) = 2mx^4 + (m-1)x^3 + (2-3m)x^2 + (3-3m)x - 9m - 6$ .
- a) Calcular las raíces independientes del parámetro  $m$ .
- b) Calcular  $m$  para que la suma de las raíces sea 0.
- 30) Dado  $P(x) = ax^3 + a^3x^2 + (3a^2 - a^3)x - 6a^3 - 9a^2 - 27a$ . Hallar la raíz independiente del parámetro (R.I.P).
- 31) Dado  $P(x) = (m-2)x^3 - (5m-2)x^2 + (11m-1)x - 7m + 1$ . Investigar la existencia de R.I.P.  $m$ .
- 32)  $P(x) = (m^4 + 3m - 1)x^4 + (3m^2 + 7m^4 - 1)x^2 + 2 - 3m - 3m^2 - 8m^4$ . Investigar la existencia de R.I.P.  $m$ .
- 33) Resolver:  $x^3 - (3m+a)x^2 + m(2m+3a)x - 2m^2a = 0$ ; sabiendo que tiene una raíz independiente de  $m$ , siendo  $a$  un real conocido.
- 34) Resolver:  $3mx^4 - (3m^2 + 10m + 3)x^3 + (10m^2 + 6m + 10)x^2 - (3m^2 + 10m + 3)x + 3m = 0$ , sabiendo que admite dos R.I.P.
- 35) Dado  $P(x) = x^3 - 2x^2 + (a^2 + 2a - 5)x - (2a^2 + 2a - 10)$ .
- i) Investigar la existencia de R.I.P.  $a$ .
- ii) Determinar  $a$  para que  $P(x)$  sea divisible por  $(x^2 + a^2)$ .
- iii) Para el valor hallado en b), resuelve  $P(x) = 0$ .
- 36) Dado  $P(x) = (m-1)x^3 + (2m-5)x^2 - (-5-7m)x - 10m + 1$ .
- a) Investigar la existencia de R.I.P.  $m$ .
- b) Hallar  $m$  para que las tres raíces de  $P(x)$  sean reales.
- 37) Dado  $P(x) = x^3 - (a+4)x^2 + 2(2a+2)x - 4a$ .
- a) Investigar la existencia de R.I.P.  $a$ .
- b) Resuelve  $P(x) = 0$ .
- c) Hallar  $a$  para que la suma de las raíces valga 4.
- 38) Sea  $M(x)$  un polinomio de cuarto grado cuyo gráfico es el siguiente:



- i) Determinar  $M(x)$ .
- ii) Resolver:  $M(x) > 0$

- 39)  $H(x)$  es un polinomio de tercer grado tal que su bosquejo gráfico es el siguiente:



- i) Determinar  $H(x)$ .
- ii) Resuelve:  $H(x) = 0$  y  $H(x) \geq 0$
- iii) ¿El resto de dividir  $H(x)$  por  $x+3$  es 30? Justifica

**Repartido Practico 5 – Matemática 5° H – POLINOMIOS- Ecuaciones e inecuaciones**

1) Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)  $-5x - 3 > 0$     b)  $7x - 6 > 5 - 6x$     c)  $x^2 - 8x + 7 < 0$     d)  $(4x + 5)(2x - 7) \geq 0$     e)  $x^2(x^2 - 9) < 0$   
 f)  $-x(2x - x^2) \geq 0$     g)  $\frac{-1}{x(x+4)} \leq 0$     h)  $\frac{x}{x-3} \geq 0$     i)  $\frac{5x-12}{x^2-16} > \frac{-1}{3x-12}$     j)  $\frac{4x-10}{x^2-2x} \geq \frac{7}{-3x}$   
 k)  $\frac{-6}{2-2x} < \frac{3x-1}{3-3x}$     l)  $\frac{2x^2-2x+1}{x^2+2x+6} \geq 3$

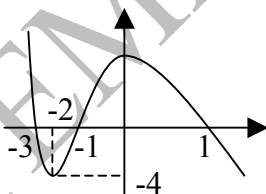
2) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$     b)  $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$     c)  $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$     d)  $14x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$   
 e)  $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$     f)  $15x^4 + 28x^3 - 230x^2 + 28x + 15 = 0$     g)  $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$   
 h)  $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$

3) Resuelve las siguientes inecuaciones:

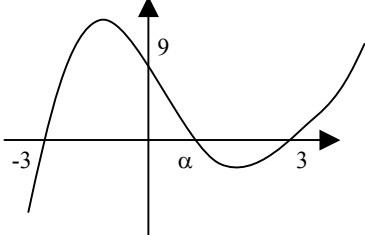
a)  $\frac{-4x^2 + 3x + x^3}{x^2 - 6x + 5} \leq 0$     b)  $\frac{(-x+3)(x^2+2x-3)}{(x-4)^2(2x-5x^2)^2} \geq 0$     c)  $\frac{(x-1)^2}{-3(x-1)} + \frac{6-x}{3(x-1)} \leq 0$   
 d)  $\frac{x^4}{x-1} + \frac{6x^2}{1-x} < \frac{-5}{x-1}$     e)  $\frac{(x^4+3x^2-4)(x^3+x^2)}{3x^4-10x^2+7} \leq 0$     f)  $\frac{x^3+3x^2+x}{(x-1)\sqrt{x+1}} \geq 0$

4) a) Sea una función Polinómica  $f(x)$  de tercer grado y su bosquejo gráfico es el siguiente:



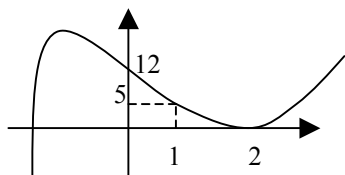
- i) Determinar  $f(x)$ .
- ii) Resuelve  $f(x) \leq 0$ .
- iii) Responde V o F. Justifica.
  - a)  $f(x)$  dividido por  $x+2$  da resto  $-4$ .
  - b)  $f(x)$  es divisible por  $x-3$ .

5) a) Determinar  $f(x)$  de tercer grado sabiendo que  $f(x)$  dividido entre  $x+2$  da resto 15 y su gráfico es el siguiente:



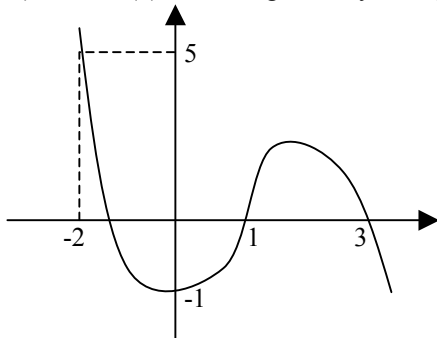
- b) Resolver en  $\mathbb{R}$ :  $\frac{f(x)}{x(x-3)^2} \geq 0$ .
- c) Responde V o F. Justifica.
  - i)  $f(x)$  es divisible por  $x-3$ .
  - ii) El resto de dividir  $f(x)$  por  $x$  es 0.
  - iii) La imagen de  $-3$  es igual a  $f(3)$ .

6) a) Determinar un polinomio  $A(x)$  de tercer grado cuyo bosquejo gráfico se adjunta.



- b) Resuelve:  $\frac{-A(x)}{x-2} \geq 0$
- c) Responde V o F. Justifica.
  - i) El resto de dividir  $A(x)$  por  $(x-1)$  es 5.
  - ii)  $A(x)$  es divisible por  $x-12$ .
  - iii)  $A(x)$  es divisible por  $(x-2)^2$ .

7) a) Hallar  $P(x)$  de tercer grado cuyo bosquejo gráfico se adjunta.



- b) Indica el signo de  $P(x)$ .
- c) Resuelve:  $\frac{P(x)}{-x^2+1} \leq 0$ .
- d) Resuelve:  $P(x) = -1$