# NOTAS TEÓRICAS I ORDEN EN R. VALOR ABSOLUTO

## I) ORDEN EN R

Existe un subconjunto de R, que llamaremos conjunto números reales positivos, anotamos $R_+$, que cumple las siguientes propiedades:

A) (ley de tricotomía)

Para cada $a \in R$, se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones: 1) $a = 0$

2) $a \in R_+$

3) $(-a) \in R_+$

B) Si $a \in R_+$ y $b \in R_+$ entonces: 1) $a + b \in R_+$

2) $a \cdot b \in R_+$

Definición 1

Dados *a* y *b* números reales diremos que:

1) "*a es menor que b*" (o que "*b es mayor que a*") $\Leftrightarrow$ $b - a \in R_+$. Anotamos $a < b$.

2) "*a es menor o igual que b*" (o que "*b es mayor o igual que a*") $\Leftrightarrow$ $a < b$ o $a = b$. Anotamos $a \leq b$.

3) "*a es mayor que b*" (o que "*b es menor que a*") $\Leftrightarrow$ $a - b \in R_+$. Anotamos $a > b$.

4) "*a es mayor o igual que b*" (o que "*b es menor o igual que a*") $\Leftrightarrow$ $a > b$ o $a = b$. Anotamos $a \geq b$.

Como consecuencia inmediata de la definición anterior tendremos que si $a > 0$, entonces *a* es un real positivo.

Es decir: $a > 0 \Leftrightarrow a \in R_+$.

Definición 2 Un número real *a* se llama *negativo* si y solo si $(-a) \in R_+$

Anotamos $R_-$ al conjunto de los reales negativos.

Definición 3

1) Llamaremos reales no negativos al conjunto $R_+ \cup \{0\}$

2) Llamaremos reales no positivos al conjunto $R_- \cup \{0\}$

Teorema 1 (también conocido como ley de tricotomía)

Dados *a* y *b* reales cualesquiera, se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:
$a < b$ o $a = b$ o $a > b$

Demostración: $b - a = x$ por la propiedad A $x = 0 \Rightarrow a = b$, o $x \in R_+ \Rightarrow b - a \in R_+ \Rightarrow a < b$. o bien $(-x) \in R_+$ y por lo tanto $a - b \in R_+$ de donde $a > b$ •

Teorema 2. Propiedad transitiva

Si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$

Demostración: $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$ y que $b < c \Leftrightarrow c - b > 0$ la propiedad B nos permite afirmar que $(b - a) + (c - b) > 0$ y como $(b - a) + (c - b) = c - a$ llegamos a que $a < c$ •

Teorema 3. Monotonía de la adición

Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Demostración: Llamemos $x = a + c$ e $y = b + c \Rightarrow y - x = b - a$. Por hipótesis $b - a > 0 \Rightarrow y - x > 0$ por lo tanto $x < y$ quedando probado el teorema •

Teorema 4. Monotonía de la multiplicación

i) Si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
ii) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Demostración de i): Si $a < b \Rightarrow b - a > 0$ por la propiedad B $c \cdot (b - a) > 0 \Rightarrow cb - ca > 0$ quedando probado el teorema •
El caso ii) queda como ejercicio.

Teorema 5

Si $a \in R^* \Rightarrow a^2 > 0$

Demostración: Si $a \in R^* \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \boldsymbol{a} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{a}^2 > 0 \\ \boldsymbol{a} > 0 \Rightarrow (-\boldsymbol{a}) > 0 \Rightarrow (-\boldsymbol{a})(-\boldsymbol{a}) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{a}^2 > 0 \end{array} \right.$ •

Teorema 6

Si $a \geq 0$ y $b > 0$ entonces, $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$

Demostración: $a^2 < b^2 \Leftrightarrow b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow (b - a)(b + a) > 0$ y por hipótesis $a + b > 0 \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow b > a$.
Recíprocamente si $b > a \Rightarrow b - a > 0$, por hipótesis $a + b > 0 \Rightarrow (b - a)(b + a) > 0 \Leftrightarrow b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2$. •

EJERCICIOS

I) Prueba las proposiciones siguientes:

1) No existe ningún número real tal que $x^2 + 1 = 0$.
2) Si $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$.
3) Si $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$.
4) Si $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

II) Verdadero o falso: Si $a < b$ y $c < d \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$. Justifica tu respuesta.

Profesor Daniel Olmos

II) VALOR ABSOLUTO

Definición 1

Llamaremos *valor absoluto* de $u \in R$, anotamos $|u|$, a: i) $|u| = u \Leftrightarrow u \geq 0$

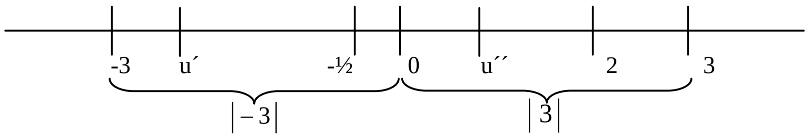
ii) $|u| = -u \Leftrightarrow u < 0$

Usualmente lo expresaremos: $|u| = \begin{cases} u \Leftrightarrow u \geq 0 \\ -u \Leftrightarrow u < 0 \end{cases}$

Ejemplos $|5| = 5$ $|-3| = -(-3)$

De la definición es inmediato que, para todo $u \in R$: 1) $|u| \geq 0$ 2) $|u| = |-u|$ 3) $u^2 = |u|^2$ 4) $u \leq |u|$

La representación geométrica de los reales, por puntos de la recta, nos permite decir que $|u|$ es la distancia de *u* al 0.

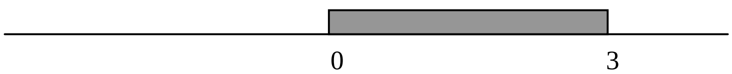



Ejemplo 1 Resolver e interpretar geométricamente. $|u| \leq 3$

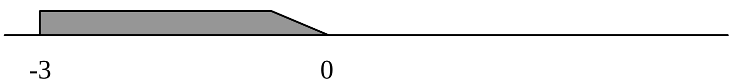
i) Si $u \geq 0$ entonces $|u| \leq 3 \Leftrightarrow u \leq 3$ , y ii) Si $u < 0$ entonces $|u| \leq 3 \Leftrightarrow -u \leq 3 \Leftrightarrow u \geq -3$

La solución es la unión de las soluciones halladas en i) y ii). Por lo tanto $S = S_i \cup S_{ii} = \{u \in R / -3 \leq u \leq 3\}$

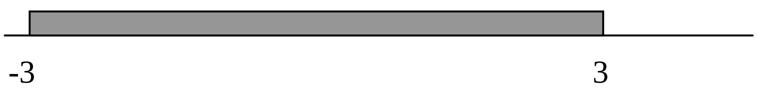
Geométricamente $S_i$ es




y $S_{ii}$ es




$S = S_i \cup S_{ii}$




Ejemplo 2 Para todo $u \in R$ se cumple $u \leq |u|$ por lo tanto: $-|u| \leq u \leq |u|$ o $-|u| \leq -u \leq |u|$

Teorema 1

Para todo $a \in R$ , $b \in R$ se cumple: 1) $|ab| = |a||b|$

2) Si $b \neq 0$ $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

3) Si $k > 0$ $|a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k$

4) Si $k > 0$ $|a| \geq k \Leftrightarrow a \geq k$ *o* $a \leq -k$

5) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular)

6) $|a| - |b| \leq |a - b|$

7) $|a| - |b| \leq \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

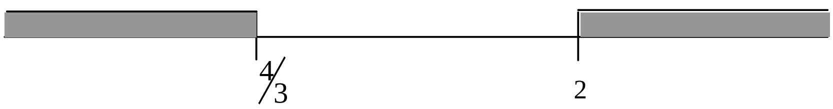
8) $\sqrt{a^2} = |a|$

Demostración del 5: Aplicando el ejemplo 2, sumando miembro a miembro las desigualdades: $-|a| \le a \le |a|$ y $-|b| \le b \le |b|$. Obtenemos $-(|a|+|b|) \le a+b \le (|a|+|b|)$ aplicando el 3 del teorema queda demostrado •

Quedan como ejercicio las demostraciones de 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8.

<u>Ejemplo 3</u> Resolver y representar geométricamente $|3x-5| \ge 1$

Aplicando 4 del teorema tenemos que: $3x-5 \ge 1 \quad o \quad 3x-5 \le -1 \;\Rightarrow\; x \le \frac{4}{3}$ o $x \ge 2$




<u>Ejemplo 4</u> Demuestra que, para cada $\varepsilon \in R_+$ se verifica que $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon$

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow 5|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |5||x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |5(x-2)| < \varepsilon \Leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon$$

<u>Ejemplo 5</u> Para cada $\varepsilon \in R_+$ halla $\delta \in R_+$ tal que $|x-3| < \delta \Rightarrow |6x-18| < \varepsilon$

$|6x-18| < \varepsilon \Leftrightarrow |6(x-3)| < \varepsilon \Leftrightarrow 6|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{6}$ por lo tanto $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$ y para cualquier valor menor que $\frac{\varepsilon}{6}$ también se cumple. Las implicaciones anteriores nos permiten afirmar que $|x-3| < \delta \Leftrightarrow |6x-18| < \varepsilon$

<u>EJERCICIOS</u>

1) Demuestra la propiedad triangular aplicando el teorema 6.

Profesor Daniel Olmos