

<b>10-1</b>	<b>1</b>	NOMBRE .....	<b>FUNCIÓNES REALES</b>	<b>MATEMÁTICA A</b>
	<b>1 P</b>	6º   ...../...../.....		Liceo:

1. i - Estudiar el signo y bosquejar el gráfico de las siguientes funciones :

a)  $f : f(x) = 4x + 2$

b)  $f : f(x) = -3x$

c)  $f : f(x) = -3x + 4$

d)  $f : f(x) = -2x^2$

e)  $f : f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4$

f)  $f : f(x) = 2x^2 + 6x$

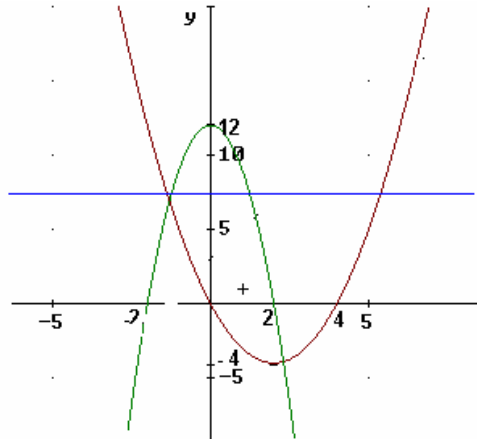
g)  $f : f(x) = x^2 + 2$

h)  $f : f(x) = x^2 + 2x + 3$

i)  $f : f(x) = (2x - 1)^2$

j)  $f : f(x) = -3$

k)  $f : f(x) = (x + 2)^2 \cdot (2x - 3)$



ii- El gráfico adjunto tiene representadas tres funciones,  $h$ ,  $w$ ,  $k$ ,  $h$  es la función cuadrática de concavidad positiva,  $w$  es la función cuadrática de concavidad negativa y  $k$  es la función constante:

1- hallar la expresión de cada una de dichas funciones.

2- resolver:  $h(x) \leq k(x)$        $w(x) > k(x)$        $h(x) \geq w(x)$

Interpretar gráficamente dichas resoluciones.

2 . a) Estudiar: dominio, signo.

b) Investigar el comportamiento de  $f$  para valores de " $x$ " próximos a los puntos de no existencia y para  $x \rightarrow \pm\infty$  sólo en los casos 1),4),5) y 8)

c) Realizar a partir de las informaciones anteriores el esbozo gráfico de  $f$  en cada caso indicado en b).

d) Resolver las inecuaciones indicadas.

1)  $f : f(x) = \frac{3x + 4}{2x - 6}$

Resolver :  $f(x) \geq 0$

2)  $f : f(x) = \frac{3 - 6x}{2x + 1}$

Resolver :  $f(x) < 0$

3)  $f : f(x) = \frac{3x}{-6 - 2x}$

Resolver :  $f(x) \geq 0$

4)  $f : f(x) = \frac{5 - 2x}{9x^2 + 6x + 1}$

Resolver :  $f(x) \leq 0$

5)  $f : f(x) = \frac{-3}{3x - 2}$

Resolver :  $f(x) < 0$

6)  $f : f(x) = \frac{-2x + 3}{2}$

7)  $f : f(x) = \frac{4x^2 - 1}{4}$

Resolver :  $f(x) \geq 0$

8)  $f : f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

Resolver :  $f(x) \geq 0$

9)  $f : f(x) = \frac{(2x + 2) \cdot (x - 1)^2}{(-x^2 + 4x + 5) \cdot x}$

Resolver :  $f(x) \geq 0$

3) a) Para cada una de las siguientes funciones completar:

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow$$

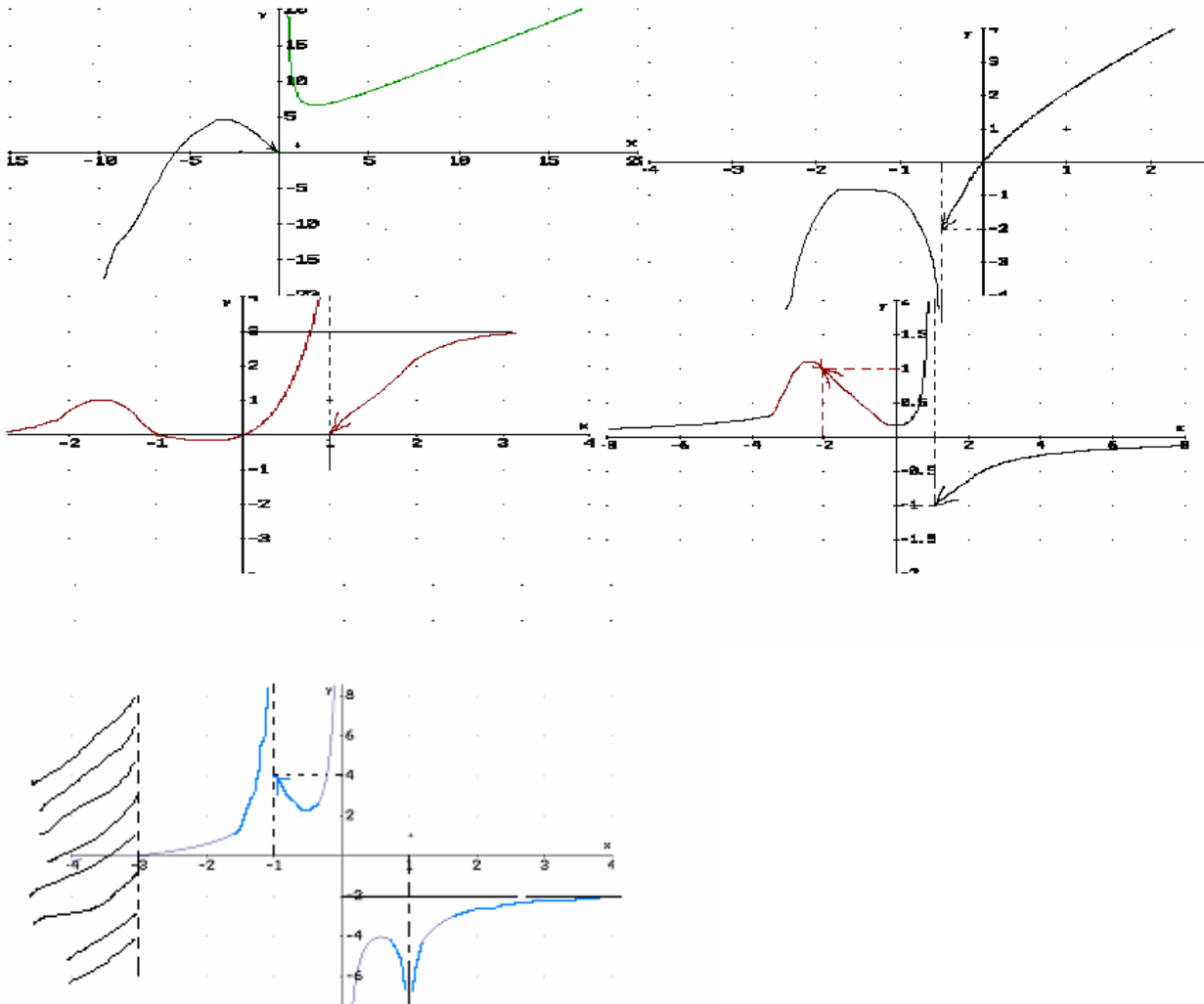
$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$a^+$$

$$a^-$$

siendo  $x=a$  cada punto de no existencia de  $f$ .



b) Dadas las siguientes tablas de límites con sus respectivos signos, analizar si existe un gráfico coherente con los datos y, en ese caso hacerlo, si no, corregir el signo para poder hacer el bosquejo gráfico:

$$\begin{array}{l}
 x \rightarrow f(x) \rightarrow \\
 -\infty \quad +\infty \\
 \text{i) } +\infty \quad +\infty \quad \text{sg } \underline{++0--\cancel{+}--0++++} \rightarrow \\
 -1^- \quad 0 \\
 -1^+ \quad -\infty
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x \rightarrow f(x) \rightarrow \\
 -\infty \quad -\infty \\
 \text{ii) } +\infty \quad +\infty \quad \text{sg } \underline{----0+++ \cancel{+}++++} \rightarrow \\
 0^- \quad 1 \\
 0^+ \quad +\infty
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x \rightarrow f(x) \rightarrow \\
 -\infty \quad -\infty \\
 \text{iii) } +\infty \quad +\infty \quad \text{sg } \underline{--0+++ \cancel{+}++0-0++} \rightarrow \\
 1^- \quad +\infty \\
 1^+ \quad +\infty
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x \rightarrow f(x) \rightarrow \\
 -\infty \quad -\infty \\
 +\infty \quad +\infty \\
 \text{iv) } 0^- \quad -\infty \quad \text{sg } \underline{----\cancel{+}--0--\cancel{+}+++} \rightarrow \\
 0^+ \quad -2 \\
 2^- \quad +\infty \\
 2^+ \quad +\infty
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x \rightarrow f(x) \rightarrow \\
 -\infty \quad 0^- \\
 +\infty \quad 0^- \\
 \text{v) } -1^- \quad -\infty \quad \text{sg } \underline{---\cancel{+}---0+++ \cancel{+}---} \rightarrow \\
 -1^+ \quad -2 \\
 0^- \quad +\infty \\
 0^+ \quad -\infty
 \end{array}$$

**4** Cada relación escrita en la columna de la izquierda. Buscar los pares iguales.

1	$ x  < 3$
2	$ x-1  < 3$
3	$ 3-2x  < 1$
4	$ 1+2x  \leq 1$
5	$ x-1  > 2$
6	$ x+2  \geq 5$
7	$\left 5-\frac{1}{x}\right  < 1$
8	$ x-5  <  x+1 $
9	$ x^2-2  \leq 1$
10	$\sqrt{(x+3)^2}$
11	$ x+3 ^2$

<b>A</b>	$x > 3 \text{ o } x < -1$
<b>B</b>	$-3 < x < 3$
<b>C</b>	$x > 2$
<b>D</b>	$(x+3)^2$
<b>E</b>	$-2 < x < 4$
<b>F</b>	$1 < x < 2$
<b>G</b>	$-\sqrt{3} \leq x \leq -1 \text{ o } 1 \leq x \leq \sqrt{3}$
<b>H</b>	$x \leq -7 \text{ o } x \geq 3$
<b>I</b>	$\frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$
<b>J</b>	$-1 \leq x \leq 0$
<b>K</b>	$ x+3 $

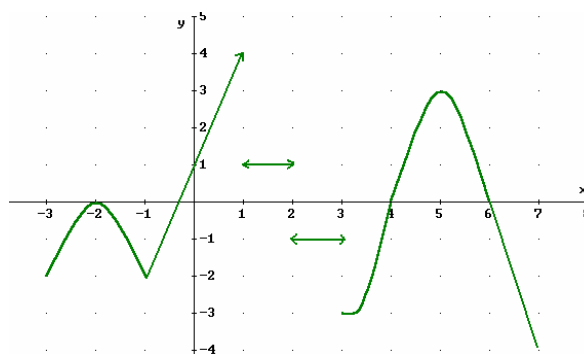
**6** Realizar la RG de las siguientes funciones:

- a)  $f / f(x) = |x-3|$
- b)  $f / f(x) = |x^2 - 2x - 3|$
- c)  $f / f(x) = \left| \frac{x}{x+1} \right|$
- d)  $f / f(x) = |4x-2| + 2x+3$
- e)  $f / f(x) = |x^2 - 4| + 3x$
- f)  $f / f(x) = x^2 + x - |x^2 - 4|$
- g)  $f / f(x) = |x+3| + |x+5|$
- h)  $f / f(x) = x-1 + \left| \frac{x-3}{x} \right|$

**5** Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justificar.

- $|2 - \sqrt{5}| = 2 - \sqrt{5}$  (.....)
- $|\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$  (.....)
- $si\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow |-x| = x$  (.....)
- $si\ x < -3 \Rightarrow |x+3| = x+3$  (.....)
- $si\ x > 5 \Rightarrow |x-5| = x-5$  (.....)
- $si\ x > 3 \Rightarrow |-3+x| = 3-x$  (.....)
- $si\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x^2 - 4| = x^2 - 4$  (.....)
- $si\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \sqrt{x^2}$  (.....)
- $si\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x-1| = |x-2|$  (.....)
- $si\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow |(x-1).(x^2+1)| = (x^2+1)|x-1|$  (.....)
- $si\ x > -2 \Rightarrow |(x+2).(x-3)| = (x+2)|x-3|$  (.....)
- $si\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left| \frac{3(-x-4)}{x^2+5} \right| = \frac{3}{x^2+5} |x+4|$
- $si\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow |3x^2 - 5| < 3x^2 + 5$

**7** El siguiente gráfico corresponde a la RG de una función  $f$  :



- a) Indicar el dominio y el signo de  $f$  .
- b) Bosquejar:
  - i)  $-f(x)$       ii)  $|f(x)|$       iii)  $2f(x)$
  - iv)  $-3f(x)$     v)  $\frac{1}{2}f(x)$     vi)  $f(x)+2$
  - vii)  $f(x)-3$     viii)  $\frac{|f(x)|+f(x)}{2}$

**8 a)** Resolver las siguientes inecuaciones:

1) Resolver: i)  $|2x - 7| < 1$       ii)  $|-3x + 5| \geq 2$       iii)  $|x - a| < \delta$ , con  $\delta / \delta \in \mathbb{R}^+$

2) Verificar, gráficamente, los resultados obtenidos en a)1y2

**b)** Resolver:

i)  $|x^2 - 1| < 2$       ii)  $|4x^2 - x| \geq 2x + 1$       iii)  $|x^3 - 2x^2| < 5$       iv)  $|x^5 - 3x^2 + 4x - 7| < -2$

**Función Signo:**

Definiremos una nueva función, la Función Signo:

$$f / f(x) = \mathbf{sg}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

👉 Obsérvese que, de acuerdo a nuestra definición, la función signo, no está definida si  $x = 0$

**9 (A)** Estudiar las siguientes funciones:

a)  $f / f(x) = \mathbf{sg}(x - 2)$     b)  $f / f(x) = \mathbf{sg}(x^2 - 2)$     c)  $f / f(x) = \mathbf{sg}(x^3 - 5)$     d)  $f / f(x) = (x^2 - 4x) \cdot \mathbf{sg}(6 - 3x)$   
 e)  $g / g(x) = \mathbf{sg}(f(x))$ , siendo  $f$  la función representada en el ejercicio 7.

(B) Demostrar que

$$|x| = x \cdot (\mathbf{sg}(x))$$

si  $x \neq 0$

**10** Estudiar: dominio, signo y representación gráfica de  $f / f(x) = \sqrt{x}$  y  $g / g(x) = \sqrt[3]{x}$ , se sugiere construir una tabla de valores.

**11** Estudiar dominio, signo y esbozo gráfico de las siguientes funciones:

a)  $f / f(x) = \sqrt{x+1}$       b)  $f / f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 25}$       c)  $f / f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x-3}}$       d)  $f / f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+2}}$   
 e)  $f / f(x) = \sqrt{\frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 5}}$       f)  $f / f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}$

$$g) f/f(x) = \frac{x+2}{x-1} \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$$

$$h) f/f(x) = 2x - \sqrt{5x-1}$$

$$i) f/f(x) = \sqrt{x^2-4} - \sqrt{x+2}$$

$$j) f/f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{2x+1}$$

**12** Estudiar dominio, signo y esbozo gráfico de las siguientes funciones:

$$1) f/f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ x^2-9 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad 2) f/f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad 3) f/f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 4-x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

### Definición

- dada  $f : A \mapsto B$  **biyectiva**, diremos que  $f^{-1} : B \mapsto A$  es la función inversa de  $f$  si:  

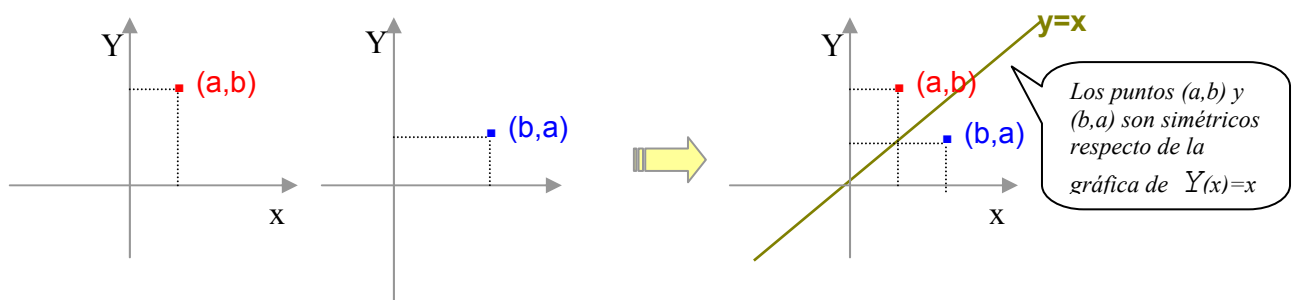
$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

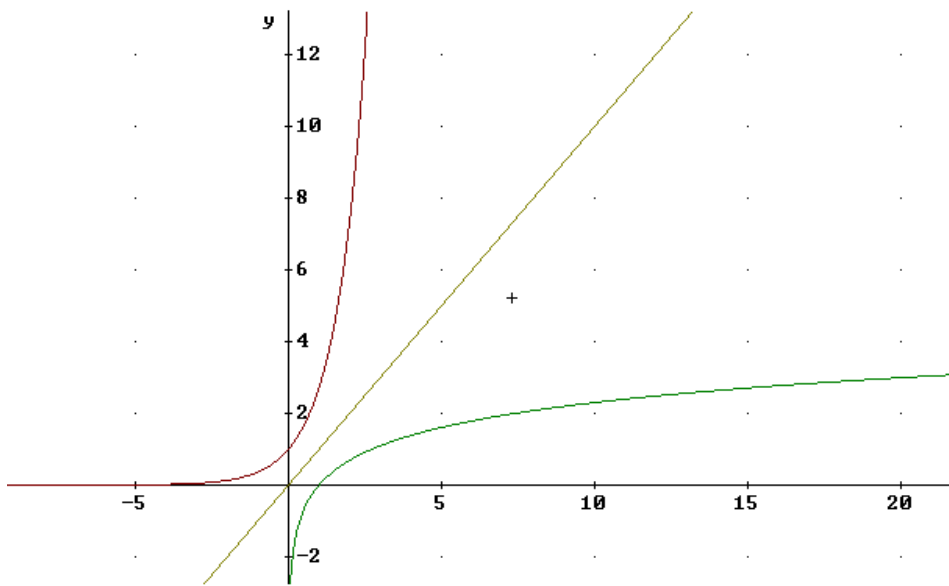
**Obsérvese que:**

- para que la función  $f^{-1}$  esté definida  $f$  debe ser una función biyectiva.
- $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ ,  $\forall x/x \in A$  es decir  $f^{-1} \circ f = Y$ ,  $Y$  es la función identidad,  $Y(x) = x$  y su representación gráfica es la recta  $y=x$ .
- $(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y/y \in B$

Las gráficas de  $f$  y  $f^{-1}$  están tan íntimamente relacionadas que es posible utilizar la gráfica de  $f$  para obtener la gráfica de  $f^{-1}$ .

☞ Puesto que la gráfica de  $f^{-1}$  consiste en todos los pares  $(b,a)$  tales que  $(a,b)$  pertenecen a la gráfica de  $f$ , **obtenemos la gráfica de  $f^{-1}$  simetrizando la gráfica de  $f$  respecto a la recta  $y=x$**





**Observar que ...**

♦ Al obtener dos veces la simétrica respecto de la recta  $y=x$  volvemos al punto de partida, esto significa que  $(f^{-1})^{-1} = f$ , con lo que concluimos que  $f^{-1}$  es también una función biyectiva.

♦  $f^{-1}(b)$  es el único real  $a$  tal que  $f(a)=b$ .

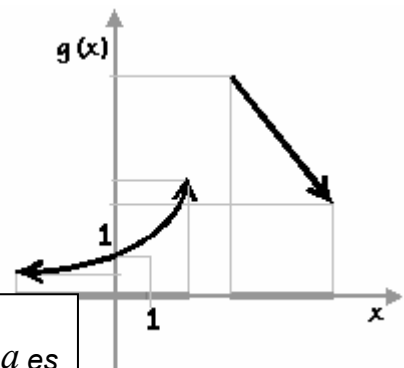
Por ejemplo: si  $f(x) = x^3$ , tenemos entonces,  $f^{-1}(b)$  es el único real  $a$  tal que  $a^3 = b$  y éste número es por definición  $\sqrt[3]{b}$ .

**APLICACIONES**

⇒ Sea  $f:f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x \neq 3 \text{ y } x \neq 5 \\ 3 & \text{si } x = 5 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$  realizar la RG de  $f$ .

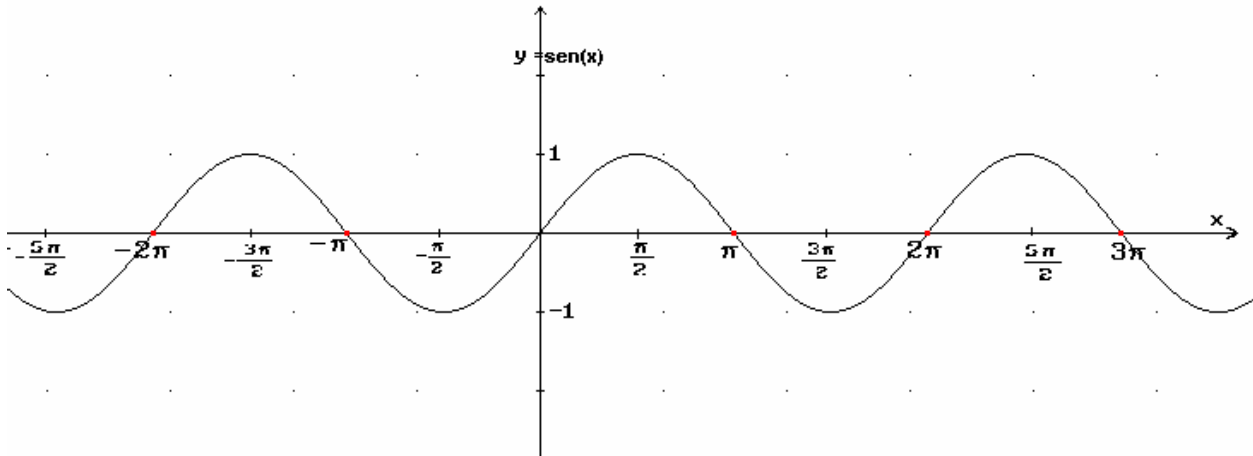
⇒ Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^2$  indicar en qué condiciones de dominio es posible hallar  $f^{-1}$ , hallar  $f^{-1}$  y realizar su RG.

⇒ Dada la R.G. de una función  $g$ ,  $s/f$ , investigar la existencia de  $g^{-1}$



⇒ es conveniente recordar que la notación  $\sqrt{a}$ , cuando  $a$  es un número  $\geq 0$ , designa al único número  $\geq 0$  cuyo cuadrado es  $a$ , mientras que el número negativo cuyo cuadrado es  $a$  se designa  $-\sqrt{a}$ , por ello al resolver la ecuación  $x^2=a$ , con  $a \geq 0$ , escribimos  $x = \pm \sqrt{a}$

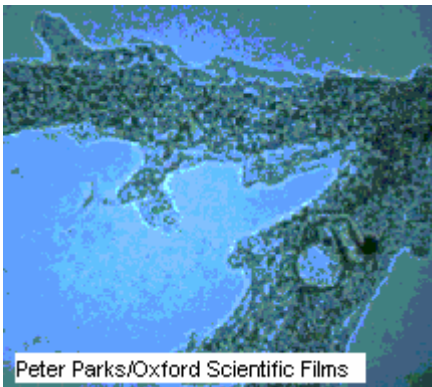
**13** Dada la siguiente función por su RG, determinar dominio y codominio para que sea biyectiva. En este caso definir y graficar su función inversa.



Repetir el ejercicio anterior con las funciones:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} / f(x) = \cos x$$

$$g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \mathbb{R} / g(x) = \operatorname{tg} x$$



### Reproducción de una ameba

Las amebas o amebas unicelulares presentan un método sencillo de reproducción asexual. Se dividen en dos mediante un proceso llamado fisión, con el que producen dos pequeñas células hijas. Después de un periodo (una hora aprox) de alimentación y crecimiento, estas dos células hijas volverán a dividirse.

**13 a)** Calcular el número de amebas que se producen en cada hora y completar la siguiente tabla:

TIEMPO	1h	2h	3h	4h	5h	6h	...	xh
AMEBAS								

b) Representa gráficamente la función  $f$  que se origina.

c) Valiéndote de las nociones de operaciones inversas y funciones inversas investiga,

Suponiendo que las amebas generadas por bipartición quedaran todas vivas, después de cuántas horas surgirían 32768 descendientes?

d) Investiga la existencia de la función  $f^{-1}$  inversa de  $f$ .

Peter Parks/Oxford Scientific Films<sup>1</sup>

<sup>1</sup>"Reproducción de una ameba", *Enciclopedia Microsoft® Encarta® 98* © 1993-1997 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.