Definición 1 Determinantes de orden 1,2 3.

$$A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Técnica de cálculo para el determinante de 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$

Ejemplo

Calcula $\det(A)$ *tal que* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\det(A) = -2\cdot3\cdot2 - 2\cdot1\cdot3 - 1\cdot(-4)\cdot5 + 2\cdot3\cdot5 + 1\cdot1\cdot2 + 2\cdot(-4)\cdot3$$

$$\det(A) = -12 - 6 - (-20) + 30 + 2 + (-24)$$

$$\det(A) = 10$$

Menor complentario

Definición 2 (Menor complementario)

Llamamos Menor complementario del elemento a_{ij} *(anotamos:* M_{ij} *) de una matriz, al determinante que se obtiene de suprimir en la matriz, la fila i y la columna j.*

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$ el Menor Complentario del elemento a_{32} es $M_{32} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

<u>Definición 3</u> Adjunto

Llamamos <u>Adjunto</u> de un elemento a_{ij} de una matriz A (anotamos: $A_{ij}\,(A)$) a $(-1)^{i+j}M_{ij}$, en símbolos:

$A_{ij}\,(A) = (-1)^{i+j}\,M_{ij}$.

<u>Ejemplo</u> Considerando el ejemplo anterior, al adjunto del elemento a_{32} es $A_{32}(A) = (-1)^{3+2}M_{32}$ por lo tanto

$A_{32}\,(A) = -M_{32}$

<u>Ejemplo</u>

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

a_{23}

El menor complentario del elemento a_{23} es $M_{23} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 3 - 1\cdot 2 = 4$, y el adjunto correspondiente es

$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23}$, cuyo valor es $A_{23} = -4$.

<u>Desarrollo del determinante de una matriz por runa fila</u>

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Por definición $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$

De donde, sacando algunos factores comunes, obtenemos:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(-1)(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12}(-1)\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11}(A) + a_{12}A_{12}(A) + a_{13}A_{13}(A)$$

que llamamos desarrollo del determinante de la matriz *A* por la 1ª fila.

Es posible obtener desarrollos del determinante anterior por cualquier fila o columna!, así:

1) El desarrollo del determinante por una fila *i*, (o *iésima* fila) es:

$\det(A) = a_{i1} A_{i1}(A) + a_{i2} A_{i2}(A) + a_{i3} A_{i3}(A)$

2) El desarrollo del determinante por la columna *j*, o *jotaésima* columna es:

$\det(A) = a_{1j} A_{1j}(A) + a_{2j} A_{2j}(A) + a_{3j} A_{3j}(A)$

Definición 4

Llamamos determinante de una matriz $A_{n\times n}$ *a:*

$\det(A) = a_{11} A_{11}(A) + a_{12} A_{12}(A) + a_{13} A_{13}(A) + \cdots + a_{1n} A_{1n}(A)$ •

Dada una matriz $A_{n\times n}$, son válidos los desarrollos de los determinantes por cualquier fila o columna:

1) $\det(A) = a_{i1} A_{i1}(A) + a_{i2} A_{i2}(A) + a_{i3} A_{i3}(A) + \cdots + a_{in} A_{in}(A)$ desarrollo del determinante de la matriz *A* por la *iésima* fila, o por la fila *i*.

2) $\det(A) = a_{1j} A_{1j}(A) + a_{2j} A_{2j}(A) + a_{3j} A_{3j}(A) + \cdots + a_{nj} A_{nj}(A)$ desarrollo del determinante de la matriz *A* por la *jotaésima* columna, o por la columna *j*.

Profesor Daniel Olmos