

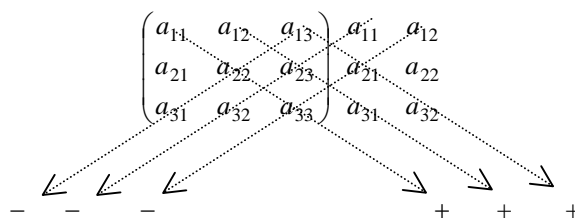
Definición 1 Determinantes de orden 1,2 3.

$$A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

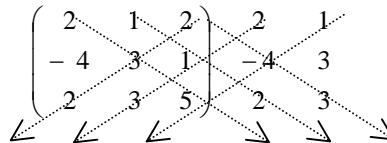
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Técnica de cálculo para el determinante de 3x3



Ejemplo

Calcula $\det(A)$ tal que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$



$$\det(A) = -2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) \cdot 3$$

$$\det(A) = -12 - 6 - (-20) + 30 + 2 + (-24)$$

$$\det(A) = 10$$

Menor complementario

Definición 2 (Menor complementario)

Llamamos Menor complementario del elemento a_{ij} (anotamos: M_{ij}) de una matriz, al determinante que se obtiene de suprimir en la matriz, la fila i y la columna j .

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \text{ el Menor Complementario del elemento } a_{32} \text{ es } M_{32} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Definición 3 Adjunto

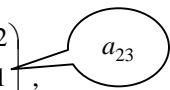
Llamamos Adjunto de un elemento a_{ij} de una matriz A (anotamos: $A_{ij}(A)$) a $(-1)^{i+j} M_{ij}$, en símbolos:

$$A_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ejemplo Considerando el ejemplo anterior, al adjunto del elemento a_{32} es $A_{32}(A) = (-1)^{3+2} M_{32}$ por lo tanto

$$A_{32}(A) = -M_{32}$$

Ejemplo

En la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, 

El menor complementario del elemento a_{23} es $M_{23} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 4$, y el adjunto correspondiente es

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}, \text{ cuyo valor es } A_{23} = -4.$$

Desarrollo del determinante de una matriz por una fila

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Por definición $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$

De donde, sacando algunos factores comunes, obtenemos:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(-1)(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12}(-1) \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} A_{11}(A) + a_{12} A_{12}(A) + a_{13} A_{13}(A)$$

que llamamos desarrollo del determinante de la matriz A por la 1ª fila.

Es posible obtener desarrollos del determinante anterior por cualquier fila o columna!, así:

1) El desarrollo del determinante por una fila i , (o *iésima* fila) es:

$$\det(A) = a_{i1} A_{i1}(A) + a_{i2} A_{i2}(A) + a_{i3} A_{i3}(A)$$

2) El desarrollo del determinante por la columna j , o *jotaésima* columna es:

$$\det(A) = a_{1j} A_{1j}(A) + a_{2j} A_{2j}(A) + a_{3j} A_{3j}(A)$$

Definición 4

Llamamos determinante de una matriz $A_{n \times n}$ a:

$$\det(A) = a_{11} A_{11}(A) + a_{12} A_{12}(A) + a_{13} A_{13}(A) + \cdots + a_{1n} A_{1n}(A) \bullet$$

Dada una matriz $A_{n \times n}$, son válidos los desarrollos de los determinantes por cualquier fila o columna:

1) $\det(A) = a_{i1} A_{i1}(A) + a_{i2} A_{i2}(A) + a_{i3} A_{i3}(A) + \cdots + a_{in} A_{in}(A)$ desarrollo del determinante de la matriz A por la *iésima* fila, o por la fila i .

2) $\det(A) = a_{1j} A_{1j}(A) + a_{2j} A_{2j}(A) + a_{3j} A_{3j}(A) + \cdots + a_{nj} A_{nj}(A)$ desarrollo del determinante de la matriz A por la *jotaésima* columna, o por la columna j .