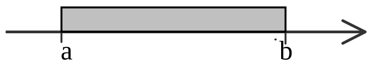
NOTAS TEÓRICAS II   COTAS y EXTREMOS. AXIOMA del EXTREMO SUPERIOR   Curso 2007

1. ***Intervalos***

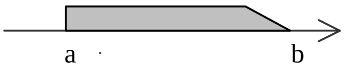
Dados dos números reales *a* y *b* , *a* < *b*, llamaremos *intervalos* a los conjuntos definidos de alguna de las cuatro formas siguientes:

$[a,\, b] = \{ x \in R \,/\, a \le x \le b \}$ que llamaremos *intervalo cerrado*.
Se representan gráficamente 

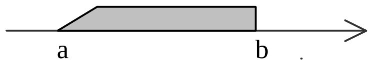
o bien 

$(a,\, b) = \{ x \in R \,/\, a < x < b \}$ que llamaremos *intervalo abierto*.
Se representan gráficamente 

o bien 

$[a,\, b) = \{ x \in R \,/\, a \le x < b \}$ que llamaremos *intervalo semicerrado o semiabierto*.
Se representan gráficamente 

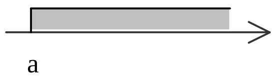
o bien 

$(a,\, b] = \{ x \in R \,/\, a < x \le b \}$ que llamaremos *intervalo semicerrado o semiabierto*.
Se representan gráficamente 

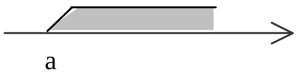
o bien 

Llamaremos *distancia* entre dos puntos o números reales *a* , *b* al número $|a-b|$. En el caso de los intervalos, esta definición tiene un significado geométrico evidente: es la longitud del intervalo. Es fácil deducir en dichos casos que : $b-a = |a-b|$.
La definición de intervalo cerrado corresponde a la de segmento en la geometría euclídea.

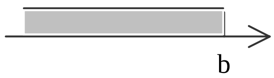
Las definiciones anteriores se pueden extender, considerando la semirrecta y la recta como intervalos no acotados.

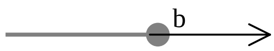
$[a,+\infty) = \{ x \in R \,/\, x \ge a \}$, se representan 

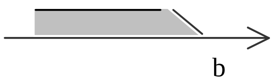
o bien 

$(a,+\infty) = \{ x \in R \,/\, x > a \}$, se representan 

o bien 

$(-\infty,\, b] = \{ x \in R \,/\, x \le b \}$, se representan 

o bien 

$(-\infty,\, b) = \{ x \in R \,/\, x < b \}$, se representan 

o bien 

Para el caso de toda la recta, se suele expresar $(-\infty,+\infty) = R$.

2. ***Cotas***

En las siguientes definiciones, haremos mención del cuerpo ordenado *K* para referirnos indistintamente al de los racionales $(Q,+,*,\ge)$ o el de los reales $(R,+,*,\ge)$, especificando uno de ellos en caso necesario.

Definición 1

Sea *C* un subconjunto de un cuerpo ordenado *K*. Se dice que:

a) $h \in K$ es *cota inferior* de *C*, si y solo si para todo $x \in C$ se cumple $h \le x$.

b) $k \in K$ es *cota superior* de *C*, si y solo si para todo $x \in C$ se cumple $x \le k$.

c) *C* es *acotado inferiormente*, si y solo si existe *h* cota inferior de *C*.

d) *C* es *acotado superiormente*, si y solo si existe k cota superior de *C*.

e) *C* es *acotado*, si y solo si es acotado superiormente e inferiormente.

La última parte de la definición, se puede expresar afirmando que si un conjunto *C* es acotado si y solo si existen *h*, y *k* tales que $h \le x \le k$ para todo $x \in C$.

Definición 2

Sea *C* un subconjunto de un cuerpo ordenado *K*.

a) *M* es *máximo* del conjunto *C*, si y solo si $M \in C$ y M es cota superior de *C*.

b) *m* es *mínimo* del conjunto *C*, si y solo si $m \in C$ y m es cota inferior de *C*.

Si un conjunto tiene máximo o mínimo éste es único. Si tuviera ambos, éstos también son únicos.

Demostrado en clase.

3. *Extremos*

Un conjunto acotado superiormente (inferiormente) tiene infinitas cotas superiores(inferiores); podemos entonces considerar el conjunto de las cotas superiores (inferiores). Por ejemplo el conjunto de las cotas superiores no tiene máximo pero si tiene mínimo. Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 3

Sea *C* un subconjunto, no vacío, de un cuerpo ordenado *K*.

a) Llamaremos *extremo superior o supremo* de *C*, a la mínima cota superior de dicho conjunto.

b) Llamaremos *extremo inferior o ínfimo* de *C*, a la máxima cota inferior de dicho conjunto.

Es decir, que el *extremo superior o supremo(extremo inferior o ínfimo)* de un conjunto no vacío, de un cuerpo ordenado, es el *mínimo (máximo)* del conjunto de las cotas superiores(cotas inferiores).

Es posible definir extremo superior e inferior del siguiente modos

Definición 3´

Un $k \in K$, se llama *extremo superior o supremo* de un conjunto no vacío $C \subseteq K$, si y solo si cumple:

i) *k* es cota superior de *C*.

ii) Si *k'* es cota superior de *C*, entonces $k \leq k'$.

Definición 3´´

Un $h \in K$, se llama *extremo inferior o ínfimo* de un conjunto no vacío $C \subseteq K$, si y solo si cumple:

i) *h* es cota superior de *C*.

ii) Si *h'* es cota superior de *C*, entonces $h' \leq h$.

Éstas definiciones son equivalen a la parte (a) y (b) respectivamente de la definición anterior de extremos.

Demostrarlo como ejercicio.

4. *Axioma del Extremo Superior o Supremo.*

En el cuerpo de los números racionales, existen subconjuntos no vacíos, acotados superiormente que no tiene extremo superior. Por ejemplo, el conjunto $A = \{x \in Q \,/\, x \geq 0,\ y\ \ x^2 < 2\}$ está acotado superiormente-probarlo- no obstante no admite extremo superior. El $\overline{ext}A = L \,/\, L^2 = 2$ que como sabemos no es racional. Ese número es el irracional, $\sqrt{2}$.

Si el conjunto *A*, estuviera definido en un cuerpo más amplio que el de los racionales; un cuerpo que admitiera a los irracionales como números, entonces *A* tendría extremo superior.

Esto da lugar a la idea de *completar* los números racionales con los irracionales obtenido un nuevo cuerpo ordenado y *completo*. Para obtener un cuerpo ordenado completo debemos agregar un nuevo axioma, llamado axioma del extremo superior o del supremo. Este axioma permite asegurar la existencia de números no racionales - los irracionales - completando a través de él, al cuerpo de los racionales, lo que motiva que a dicho axioma se le llame también axioma de *completitud*.

A este nuevo cuerpo lo llamaremos cuerpo ordenado de los números reales, o simplemente números reales, *R*.

<u>Axioma del Extremo Superior o Supremo</u>

Todo conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente tiene *extremo superior o supremo*.

<u>Ejemplo</u>

1) El intervalo $(-\infty,-5)$, es un conjunto no vacío, acotado superiormente, por lo tanto tiene extremo superior, de acuerdo al axioma. El extremo superior o supremo es –5. En este caso $5 \notin (-\infty,-5)$ por lo que este conjunto no tiene máximo.

2) El intervalo $(-\infty,-5]$, es un conjunto no vacío, acotado superiormente, por lo tanto tiene extremo superior, de acuerdo al axioma. El extremo superior o supremo es –5. En este caso $-5 \in (-\infty,-5]$ por lo que este conjunto además tiene máximo.

¿Si un conjunto no vacío es acotado inferiormente admitirá extremo inferior?

Por ejemplo ¿$[-5,+\infty)$ admitirá extremo inferior? Si, es –5, pero debemos probarlo; para ello probaremos un teorema cuya demostración utiliza un conjunto llamado conjunto simétrico de A y que se define como $A^- = \{y \in R \,/\, y = -x,\ \forall x \in A\}$.

Por ejemplo si $A = (-3,5\,]$ entonces $A^- = [-5,3\,)$.

Ejercicio: Representa gráficamente ambos conjuntos.

<u>Teorema 1</u>

Todo conjunto no vacío de números reales, acotado inferiormente tiene *extremo extremo inferior o ínfimo.*

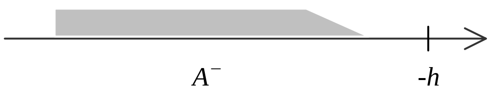
<u>Demostración</u>

Llamaremos *A* al conjunto que cumpla las hipótesis del teorema, es decir conjunto no vacío y acotado inferiormente.

Gráficamente

Definamos el conjunto $A^- = \{y \in R \,/\, y = -x,\ \forall x \in A\}$, llamado conjunto simétrico de *A*.

Gráficamente



1) $A^- \neq \phi$, efectivamente $A \neq \phi \Rightarrow \exists\, x \in A$ por lo tanto $-x \in A$.

2) A^- es acotado superiormente

Efectivamente, si *h* es una cota inferior cualquiera *A*, entonces $\forall\, x \in A$ se cumple por definición de cota inferior que $h \leq x$.

Entonces $-h \geq -x$ para todo $-x \in A$, por lo tanto –*h* es cota superior de A^-.

De 1) y 2) se deduce que el conjunto A^- está en las condiciones de Axioma del extremo superior, entonces el conjunto A^- admite extremo superior. Llamemos $L = \overline{ext} A^-$.

Entonces, para toda cota superior de A^-, $-h$ se cumple que $L \leq -h \Rightarrow -L \geq h$ siendo *h* una cota inferior cualquiera de *A*. Por lo tanto –*L* es la mayor de todas las cotas inferiores de *A* . •

Entonces, el intervalo $[-5,+\infty)$, visto anteriormente tiene extremo inferior o ínfimo, es –5, y como $-5 \in [-5,+\infty)$, -5 el mínimo del conjunto.

<u>Definición del número $\boldsymbol{e}$</u>

Consideremos el conjunto $E = \left\{ x \in R \,/\, x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in N^* \right\}$ para $n = 1, 2, \ y \ 3$ los números 2, $9/4$, y $64/27$ pertenecen la conjunto *E*. Todo número del conjunto es mayor que 1, por lo tanto el conjunto está acotado inferiormente. Podemos probar que $\underline{ext}E = mínE = 2$. Además, este conjunto está acotado superiormente, aunque no es sencillo hacerlo. Por lo tanto, *E* tiene extremo superior. Definimos $\overline{ext}E = \boldsymbol{e}$ llamada constante de Euler o número $\boldsymbol{e}$. Es un número irracional aproximadamente igual a 2,71828182845904523536028747135266249775724709369996.