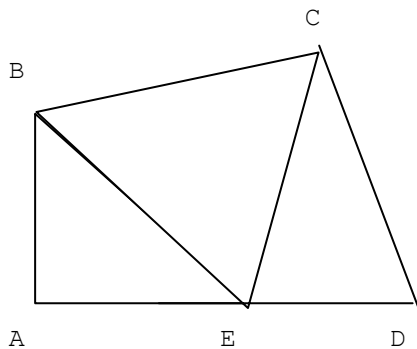


Práctico de 5° Científico, Matemática "B".
Liceo N° 3 Nocturno. Año 2007.
Profesora María del Rosario Quintans.

1) Dibuje un triángulo cualquiera ABC. Se desea construir un triángulo A'B'C' igual al ABC, investigue la mínima cantidad de condiciones que deben cumplirse entre los elementos de los dos triángulos y todos los casos posibles para hacer efectiva la construcción.

2) Construya un triángulo equilátero ABC cualquiera. Tome los puntos P, Q y R que pertenecen a los lados AB, BC y AC respectivamente, sabiendo que $AP = BQ = CR$. Demuestre que el triángulo PQR es equilátero.



3) El triángulo ABE es rectángulo en A e isósceles. El triángulo BCE es equilátero y el segmento EC es igual al DC. Los puntos A, E y D están alineados. Calcule los ángulos del triángulo CED.

4) Construya un ángulo de: 30° , 45° , 75° , 135° , $22^\circ 30'$.

5) Construya un triángulo isósceles conociendo:

- a) la base y un ángulo adyacente de 30°
- b) la base y la altura
- c) la altura y el ángulo al vértice de 45°
- d) la base y el ángulo al vértice de 45° .

6) Compruebe que: a) $x^2 - y^2$, $2xy$, $x^2 + y^2$ son expresiones pitagóricas. Escriba un ejemplo numérico.

b) Idem para la terna $2n$, $n^2 - 1$, $n^2 + 1$. ¿Cuál es la terna para $n = 4$?

7) Calcule la diagonal de: a) un rectángulo en función de los lados, b) un cuadrado en función del lado y c) un cubo en función de la arista.

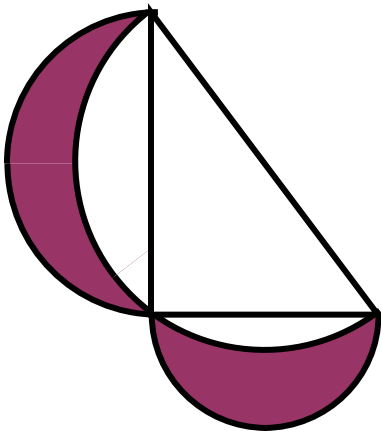
8) Calcule la altura de un triángulo equilátero en función del lado.

Práctico de 5° Científico, Matemática "B".
Liceo N° 3 Nocturno. Año 2007.
Profesora María del Rosario Quintans.

- 9) a) Construya un triángulo ABC, rectángulo en A e isósceles de catetos iguales a 1 cm. Calcule la hipotenusa.
 b) Construya un triángulo BCD, rectángulo en B, con el cateto BD = 1 cm y BC es el cateto de la parte a). Calcule la hipotenusa.
 c) Construya segmentos cuyas longitudes midan: $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{6}$ cm. Idem para $3\sqrt{2}$ cm y $3\sqrt{3}$ cm (investigue dos procedimientos).
 d) Construya un segmento de medida arbitraria que considerará la unidad de longitud.
 En relación a dicha unidad construya segmentos que midan $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{17}$ y $\sqrt{15}$.

- 10) a) Demuestre que el triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los triángulos construidos sobre los catetos.
 b) ¿Es cierta la propiedad anterior para un hexágono regular?
 c) ¿Será cierta para cualquier polígono regular?

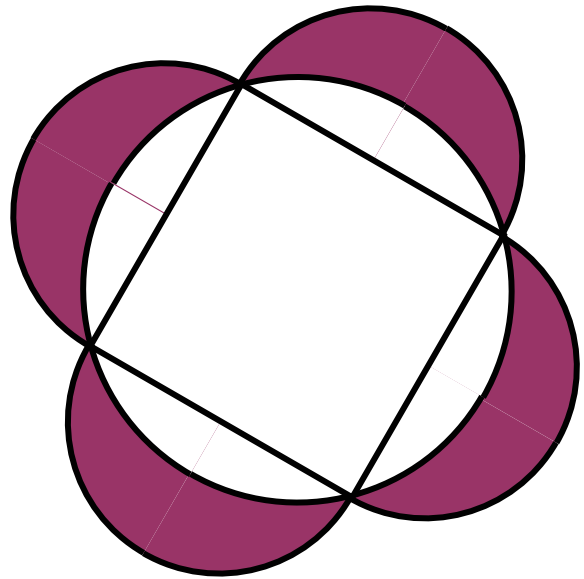
- 11) Se consideran las semicircunferencias que tienen como diámetro los lados de un triángulo rectángulo. Halle las áreas de los tres semicírculos. ¿Qué relación existe entre ellas?



- 12) Se consideran las semicircunferencias que tienen por diámetros los lados de un triángulo rectángulo como indica la figura. Demostrar que el área pintada es igual al área del triángulo.

**Práctico de 5° Científico, Matemática "B".
Liceo N° 3 Nocturno. Año 2007.
Profesora María del Rosario Quintans.**

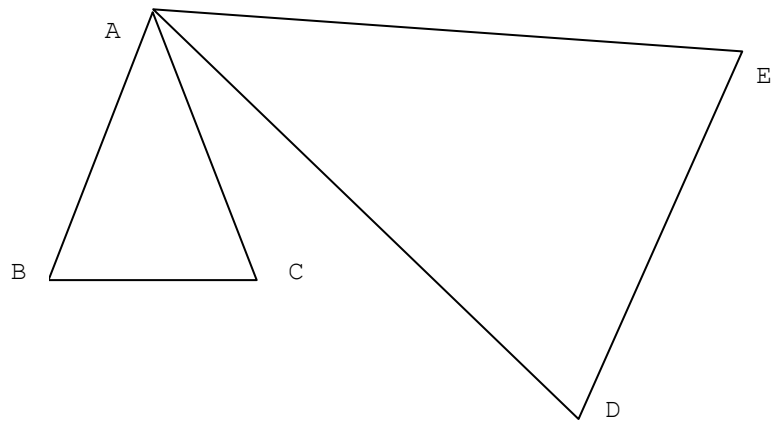
13) Inscriba un cuadrado en un círculo; construya sobre sus cuatro lados y exteriormente los correspondientes semicírculos. Demuestre que el área pintada es igual a la del cuadrado.



14) Se consideran los triángulos isósceles ABC y ADE tales que $AB = AC$, $AD = AE$ y $\angle BAC = \angle DAE$.

a) Pruebe que los segmentos CE y BD son iguales.

b) Reconstruya la figura con regla y compás y exprese el programa constructivo.



15) Construya un cuadrado ABCD de lado 40 mm.

a) Marque puntos en todo el perímetro del cuadrado a partir de un vértice de modo que la distancia entre dos puntos consecutivos sea de 5 mm.

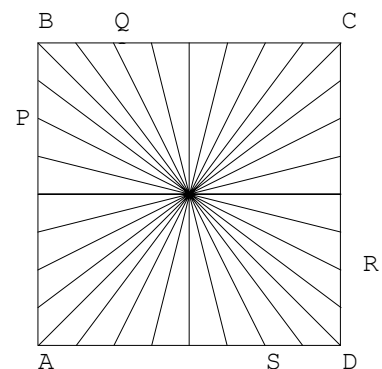
b) Construya la diagonal BD y los segmentos como lo muestra la figura.

c) Tome los puntos P, Q, R y S que pertenezcan a los lados AB, BC, CD y DA respectivamente, de modo que los segmentos AP, CQ, CR y AS sean iguales a 30 mm.

d) Construya el segmento QR y el segmento PS.

i) Observe la figura que obtuvo ¿qué afirmaría respecto a las líneas QR y PS?

ii) Naturaleza de la figura PQRS.



16)1) Construye un triángulo ABC, conociendo: $AB = 75 \text{ mm}$, $\angle BAC = 91^\circ$, $\angle ABC = 29^\circ$.

2) Construye por el punto A la recta $p \perp (CB)$ y $p \cap (CB) = \{H\}$.

3) Construye un triángulo $C'HA'$ igual al CHA de modo que los ángulos AHC y $A'HC'$ sean opuestos por el vértice.

4) ¿Cuántos triángulos pueden contruirse con esas condiciones?

5) Construya un triángulo $C''HA$ igual al $CHA / C'' \neq C'$

6) ¿Cuántos triángulos pueden contruirse con esas condiciones?

17)1) Construye con regla y compás un trapecio birrectángulo ABCD tal que: $\angle DCB = 75^\circ$, $DC = DA = 4 \text{ cm}$, $\angle D = \angle A = 90^\circ$. ABCD tiene sentido antihorario.

2) Construye el arco de circunferencia exterior al trapecio, cuyo centro es el punto C y su radio el $[CD]$.

3) Construye un triángulo equilátero de modo que uno de sus lados sea $[AD]$ y se encuentre en el semiplano de borde (AD) , que no contiene B.

4) Transporta la figura obtenida de modo que el sentido del trapecio $A'B'C'D'$ sea horario y sabiendo que el punto A' pertenece a $[BC]$ y dista 8 cm de C.

18) C' y C son dos circunferencias de radios 3 y 5 cm respectivamente. O' es el centro de C' .

i) Se considera la correspondencia $f: C \rightarrow C' / f(P) = [O'P] \cap C' \forall P \in C$; en los siguientes casos:

1) C y C' son concéntricas.

2) C y C' son tangentes interiormente.

3) C y C' son secantes y O' es interior al círculo limitado por C .

4) O' pertenece a C .

5) C y C' son secantes y O' es exterior al círculo limitado por C .

6) C y C' son tangentes exteriormente.

7) C y C' son exteriores.

Represente los casos 1 a 7 y diga:

a) si la correspondencia es función o no.

b) en caso de ser función si es inyectiva o no inyectiva, sobreyectiva o no sobreyectiva.

c) Cuántos puntos unidos tiene.

ii) Idem para la correspondencia $g: C' \rightarrow C / g(P') = [OP'] \cap C \forall P' \in C'$

Teoremas del ángulo externo:

1º) En todo triángulo, un ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos no adyacentes a él.

2º) En todo triángulo, un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a él.

19) Si un triángulo tiene dos lados desiguales, al lado mayor se opone el ángulo mayor.

20) Si un triángulo tiene dos ángulos desiguales, al ángulo mayor se opone el lado mayor.

21) En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos.

22) Corolario: Un lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos.

Definiciones:

Se llama **ángulo inscrito** en una circunferencia al que tiene su vértice en ella y sus lados son semirrectas secantes.

Se llama **ángulo semiinscrito** en una circunferencia al que tiene su vértice en ella y cuyos lados son uno tangente y otro secante a la circunferencia.

23) Probar que todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. Existen tres casos:

a) el centro de la circunferencia pertenece a uno de los lados del ángulo inscrito.

b) Es interior al ángulo.

c) Es exterior al ángulo.

Práctico de 5° Científico, Matemática "B".
Liceo N° 3 Nocturno. Año 2007.
Profesora María del Rosario Quintans.

Definiciones:

Se llama ángulo al centro o ángulo central en un círculo a aquél cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

Se llama ángulo interior o exterior a una circunferencia al que tiene su vértice interior o exterior al círculo.

24) Demostrar los siguientes corolarios del teorema del N°23:

1) Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan un mismo arco, son iguales entre sí.

2) Todo ángulo inscrito cuyos lados pasen por los extremos de un diámetro es recto.

25) Probar que todo ángulo semiinscrito es igual al inscrito que abarca el mismo arco.

26) Probar que un ángulo de vértice interior a un círculo es igual a la suma de los ángulos inscritos que abarcan respectivamente el mismo arco que él y el arco de su opuesto por el vértice.

27) Probar que un ángulo de vértice exterior a un círculo cuyos lados son secantes o tangentes a la circunferencia, es igual a la diferencia entre los ángulos inscritos correspondientes a los dos arcos que abarcan sus lados.

28) Demostrar los siguientes corolarios del teorema del N°25): 1) Todo ángulo de vértice interior a un círculo es mayor que cualquier inscrito que abarque el arco por él abarcado.

2) Todo ángulo de vértice interior a un círculo es la semi-suma de los centrales que abarcan los mismos arcos que él y su opuesto por el vértice.

29) Demostrar los siguientes corolarios del teorema de N°26): 1) Todo ángulo de vértice exterior a un círculo es menor que cualquier inscrito que abarque el mayor arco por él abarcado.

2) Todo ángulo de vértice exterior a un círculo es la semidiferencia de los centrales que abarcan los arcos por él abarcados.

Observación: De los tres corolarios N° 1 anteriores, surge que: "El conjunto (o el Lugar Geométrico) de los puntos de un semiplano de borde AB desde los cuales se ve el segmento AB bajo un mismo ángulo α es un arco de circunferencia que pasa por A y por B. Dicho arco se llama ARCO CAPAZ DE α PARA EL SEGMENTO AB.

Definiciones:

✓ Se dice que desde un punto M "se ve" un segmento AB "bajo un ángulo α " si el ángulo $\angle AMB = \alpha$.

✓ El conjunto de puntos de un semiplano de borde AB desde los cuales se ve al segmento AB bajo un mismo ángulo α , es un arco de circunferencia que pasa por A y B. Dicho arco se llama arco capaz de ángulo α y segmento AB.

30) Construir para el segmento $AB = 6$ cm los arcos capaces de 60° y 120° .

31) Idem para un segmento $PQ = 7$ cm los arcos capaces de 45° y 90° .

32) Idem para un segmento $MN = a$ y un ángulo α .

33) a) Sean tres puntos A, B y C (B entre A y C) tales que $AB = 5$ cm; $BC = 3$ cm. Hallar un punto M tal que $\angle AMB = 45^\circ$ y $\angle BMC = 75^\circ$.

b) Hallar un punto interior al triángulo AMC desde el cual se vean los tres lados bajo ángulos iguales.

34) Construir un triángulo ABC conociendo: a) El perímetro y los ángulos. b) $b + c$, $\angle ACB$ y h_b .

35) a) Construir un triángulo ABC y las medianas de los lados b y c. Sea G el punto de intersección. Transportar los segmentos NG y MG sobre GB y GC respectivamente en forma consecutiva las veces que sea posible. Elaborar una conjetura al respecto.

b) Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC respectivamente y P y Q los puntos medios de los segmentos BG y CG respectivamente. Investigar la naturaleza del cuadrilátero MPQN.

36) Probar que si en un triángulo la medida de una de las medianas es igual a la mitad de la medida del lado correspondiente, entonces el triángulo es rectángulo.

37) **a₁)** Demuestre que en todo triángulo las mediatrices de los lados se cortan en un punto (al que llamaremos circuncentro). **a₂)** Demuestre que el circuncentro equidista de los vértices del triángulo. **a₃)** Dado un arco de circunferencia halle el centro.

b₁) Demuestre que en todo triángulo las bisectrices de los ángulos internos se cortan en un punto (al que llamaremos incentro). **b₂)** Demuestre que el incentro equidista de los lados del triángulo.

c₁) Muestre en un triángulo cualquiera que las medianas de los lados se cortan en un punto (al que llamaremos baricentro). **c₂)** Verifique en la construcción realizada que la distancia del baricentro a cualquiera de los lados es la mitad de la distancia al vértice respectivamente opuesto.

d) Se desea dividir un triángulo en dos triángulos de igual área. ¿Se debe usar una mediatriz, una bisectriz o una mediana?

e) Construya en cartón un triángulo con un área de 100 cm^2 y halle su centro de gravedad. ¿Diría usted que coincide: con el circuncentro, incentro o baricentro? ¿Con ninguno de estos puntos?

f) Muestre que las alturas de un triángulo se cortan en un punto (al que llamaremos ortocentro). Halle el ortocentro de un triángulo acutángulo, otro rectángulo y otro obtusángulo.

38) Construir un triángulo ABC conociendo: 1) $b, \angle B$, altura respecto al lado b (h_b); 2) $b, \angle B$, mediana respecto al lado b (m_b); 3) $\angle B = \text{ángulo recto}$, la hipotenusa y la altura con respecto a la hipotenusa; 4) a, b, m_a ; 5) b, c, m_a ; 6) $\angle C, b$, y m_a ; 7) $m_a, b, \angle C$; 8) $b, \angle B$ y $a + c$; 9) $b, \angle B$ y $a - c$; 10) a, m_b y m_c .

39) Construir una circunferencia: a) conociendo su radio, de modo que pase por un punto P dado y sea tangente a una recta r dada. b) Que sea tangente a dos rectas, conociendo el punto de tangencia con una de ellas (determinar la circunferencia cuando las rectas son paralelas y cuando no lo son).

c) De radio dado, que sea tangente a una recta y a otra circunferencia. Discutir.

40) Construir: a) un cuadrado conociendo la medida de sus diagonales; b) un rombo tal que sus lados midan 7 cm y una de las diagonales mida 5 cm.

41) Construir un trapecio conociendo: a) tres lados y una diagonal. b) Tres lados y un ángulo. c) Los ángulos, una base y un lado. d) Los cuatro lados.

42) Construir un cuadrado conociendo: a) la suma de la diagonal y el lado; b) la diferencia de la diagonal y el lado.

43) Construir un trapecio ABCD con AB paralelo a CD, conociendo: a) los lados AB, BC y AD y el $\angle ACB = 60^\circ$. b) Los lados AB y CD, la diagonal AC y el $\angle DAC = 30^\circ$.

44) Construir una circunferencia: a) conociendo su radio, de modo que pase por un punto P dado y sea tangente a una recta r dada. b) Que sea tangente a dos rectas, conociendo el punto de tangencia con una de ellas (determinar la circunferencia cuando las rectas son paralelas y cuando no lo son).

c) De radio dado, que sea tangente a una recta y a otra circunferencia. Discutir.

45) Construir: a) un cuadrado conociendo la medida de sus diagonales; b) un rombo tal que sus lados midan 7 cm y una de las diagonales mida 5 cm.

46) Construir un trapecio conociendo: a) tres lados y una diagonal. b) Tres lados y un ángulo. c) Los ángulos, una base y un lado. d) Los cuatro lados.

47) Construir un cuadrado conociendo: a) la suma de la diagonal y el lado; b) la diferencia de la diagonal y el lado.

48) Construir un trapecio ABCD con AB paralelo a CD, conociendo: a) los lados AB, BC y AD y el $\angle ACB = 60^\circ$. b) Los lados AB y CD, la diagonal AC y el $\angle DAC = 30^\circ$.

49) Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea inscriptible, es que un par de ángulos opuestos sean suplementarios.

50) Demostrar que si los lados de un ángulo son respectivamente perpendiculares a los lados de otro ángulo, éstos son iguales o suplementarios.

51) ABC es un triángulo tal que el ángulo B es el doble del ángulo C. AH es la altura correspondiente al lado BC y M es el punto medio de AC, $AB \cap MH = \{E\}$.

a) $d(B,E) = d(B,H)$; b) BECM inscriptible.

37) **a₁)** Demuestre que en todo triángulo las mediatrices de los lados se cortan en un punto (al que llamaremos circuncentro). **a₂)** Demuestre que el circuncentro equidista de los vértices del triángulo. **a₃)** Dado un arco de circunferencia halle el centro.

b₁) Demuestre que en todo triángulo las bisectrices de los ángulos internos se cortan en un punto (al que llamaremos incentro). **b₂)** Demuestre que el incentro equidista de los lados del triángulo.

c₁) Muestre en un triángulo cualquiera que las medianas de los lados se cortan en un punto (al que llamaremos baricentro). **c₂)** Verifique en la construcción realizada que la distancia del baricentro a cualquiera de los lados es la mitad de la distancia al vértice respectivamente opuesto.

d) Se desea dividir un triángulo en dos triángulos de igual área. ¿Se debe usar una mediatriz, una bisectriz o una mediana?

e) Construya en cartón un triángulo con un área de 100 cm^2 y halle su centro de gravedad. ¿Diría usted que coincide: con el circuncentro, incentro o baricentro? ¿Con ninguno de estos puntos?

f) Muestre que las alturas de un triángulo se cortan en un punto (al que llamaremos ortocentro). Halle el ortocentro de un triángulo acutángulo, otro rectángulo y otro obtusángulo.

38) Construir un triángulo ABC conociendo: 1) $b, \angle B$, altura respecto al lado b (h_b); 2) $b, \angle B$, mediana respecto al lado b (m_b); 3) $\angle B = \text{ángulo recto}$, la hipotenusa y la altura con respecto a la hipotenusa; 4) $a, b, (m_a)$; 5) b, c, m_a ; 6) $\angle C, b$, y m_a ; 7) $m_a, b, \angle C$; 8) $b, \angle B$ y $a + c$; 9) $b, \angle B$ y $a - c$; 10) a, m_b y m_c .

39) Construir una circunferencia: a) conociendo su radio, de modo que pase por un punto P dado y sea tangente a una recta r dada. b) Que sea tangente a dos rectas, conociendo el punto de tangencia con una de ellas (determinar la circunferencia cuando las rectas son paralelas y cuando no lo son).

c) De radio dado, que sea tangente a una recta y a otra circunferencia. Discutir.

40) Construir: a) un cuadrado conociendo la medida de sus diagonales; b) un rombo tal que sus lados midan 7 cm y una de las diagonales mida 5 cm.

41) Construir un trapecio conociendo: a) tres lados y una diagonal. b) Tres lados y un ángulo. c) Los ángulos, una base y un lado. d) Los cuatro lados.

42) Construir un cuadrado conociendo: a) la suma de la diagonal y el lado; b) la diferencia de la diagonal y el lado.

43) Construir un trapecio ABCD con AB paralelo a CD, conociendo: a) los lados AB, BC y AD y el $\angle ACB = 60^\circ$. b) Los lados AB y CD, la diagonal AC y el $\angle DAC = 30^\circ$.

44) Construir un triángulo ABC conociendo: a) $2p = 22 \text{ cm}$ (perímetro), $\angle A = 60^\circ, \angle B = 45^\circ$; b) $AB = 5 \text{ cm}, \angle BAC = 75^\circ, AC + CB = 10 \text{ cm}$; c) $AB = 5 \text{ cm}, \angle ACB = 75^\circ, AC + CB = 10 \text{ cm}$.

45) Construir un triángulo isósceles ABC conociendo: a) $\angle A$ y la suma de los lados b y c , siendo $b \neq c$. (Analizar los dos casos posibles). Hacer efectiva la construcción si: $\angle A = 75^\circ, b + c = 13 \text{ cm}$.

b) $2p$ (perímetro) y la altura respecto a la base.

46) Construir un triángulo ABC conociendo: $a = 8 \text{ cm}, b = 6 \text{ cm}$ y $\angle C = 60^\circ$.

47) Construir un triángulo conociendo: el lado a , el radio r de la circunferencia circunscrita y la mediana m_b respecto al lado b .

48) Construir un triángulo ABC conociendo: a) el lado $b, \angle B$ y m_b (mediana respecto al lado b). Discutir según m_b . b) El lado $b, \angle B$ y h_b (altura respecto al lado b).

49) Construir un triángulo PQR conociendo: a) $2p, \angle P, \angle Q$; b) $2p, h_p$ y $\angle PQR$;

c) $2p, h_p, \angle Q$. Construir sabiendo que $2p = 14 \text{ cm}, h_p = 55 \text{ mm}, \angle Q = 38^\circ$.

50) Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea

Prof. María del Rosario Quintans. Liceo Nocturno N° 3. 5° Científico Mat. B.

51) Demostrar que si los lados de un ángulo α son respectivamente perpendiculares a los lados de otro ángulo β . entonces $\alpha = \beta$ o α y β suplementarios.

52) ABC es un triángulo tal que el ángulo B es el doble del ángulo C. AH es la altura correspondiente al lado BC y M es el punto medio de AC, $AB \cap MH = \{E\}$.
Probar: a) $d(B,E) = d(B,H)$; b) BECM inscriptible.