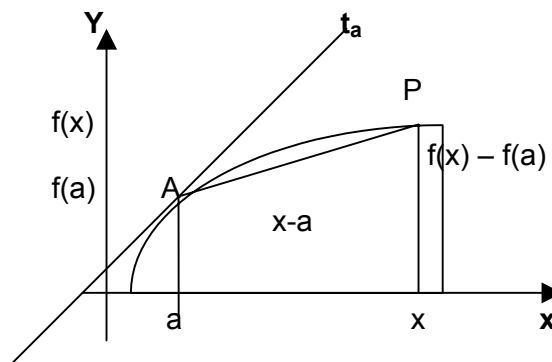


DERIVABILIDAD-CURSO 6TO-MATEMÁTICA

SÍNTESIS TEÓRICO-PRÁCTICA

PROF. SERGIO WEINBERGER



INTRODUCCIÓN.

Se considera una función f definida en un entorno de centro a , sea x perteneciente a dicho entorno.

$A : \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ le llamamos **“cociente incremental”** (“velocidad media”).

Observemos que dicho cociente es la pendiente de la recta r , que pasa por los puntos $A(a, f(a))$ y $P(x, f(x))$.

DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA DERIVADA.

Si hacemos tender x al número a ($x \rightarrow a$), en ese caso $P \rightarrow A$, y la recta AP tenderá a la recta t_a , tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

La pendiente de AP (cociente incremental o “velocidad media”) entonces, tenderá a la pendiente de t_a .

A dicho límite en caso de existir y ser finito le llamaremos :

“derivada de f en a ” y la anotaremos : $f'(a)$, como vimos, ese número es **la pendiente de la recta t_a , tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$** . (también “velocidad instantánea en a ”). Es decir :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{si existe y es finito})$$

Resumiendo:

DEFINICIÓN: Siendo f una función definida en a , diremos que ésta es **derivable en a** si y sólo si existe **y es finito** el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

A dicho límite le llamamos **derivada de f en a** y lo anotamos : $f'(a)$.

Ecuación de la recta tangente

Teniendo en cuenta que la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_A, y_A) y tiene pendiente “ m ” es : $y - y_A = m \cdot (x - x_A)$ y la interpretación gráfica de la derivada, tenemos que:

la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es :

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Ejemplo : Sea $f : f(x) = x^2 - 2x + 3$. Calcularemos (si existen) e interpretaremos gráficamente : $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 3 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x-2)}{x} = -2 = f'(0)$$

Desde el punto de vista gráfico, esto implica que la tangente a la gráfica de f en el punto $(0, f(0)) \equiv (0, 3)$, tiene pendiente -2 .

Su ecuación es : $t_0) y - 3 = -2 \cdot (x - 0)$ o sea : $t_0) y = -2x + 3$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 = f'(1)$$

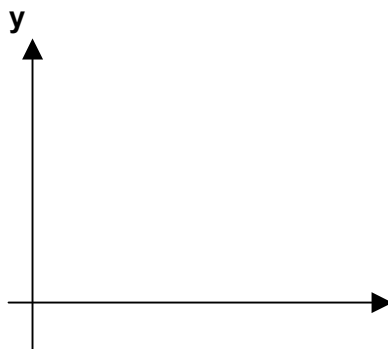
Por lo tanto, la recta tangente en el punto $(1, f(1)) \equiv (1, 2)$, tiene pendiente 0, o sea es horizontal.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 3 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot (x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 = f'(2)$$

La tangente en $(2, f(2)) \equiv (2, 3)$, tiene pendiente 2 .

Su ecuación es : $t_2) y - 3 = 2 \cdot (x - 2)$ o sea : $t_2) y = 2x - 1$

Grafiquemos f :



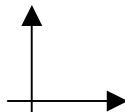
Observamos que:

Si $f'(a) > 0 \rightarrow f$ es "estrictamente creciente en a "
($f \uparrow$ en a)

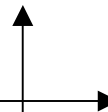
Si $f'(a) < 0 \rightarrow f$ es "estrictamente decreciente en a "
($f \downarrow$ en a)

Si $f'(a) = 0 \rightarrow$ la gráfica de f tiene tangente horizontal en $(a, f(a))$.

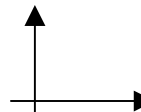
Esto podría darse en los siguientes casos:



"mínimo relativo"



"máx. relativo"



"punto de inflexión"

Estos conceptos y teoremas los veremos con más rigor.

FUNCIÓN DERIVADA :

Lo anterior podría hacernos pensar en la utilidad de conocer la derivada en cada punto, calcularemos entonces $f'(a)$, siendo a un valor cualquiera para el cual f es derivable. Lo haremos en el ejemplo que venimos trabajando :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x + 3 - (a^2 - 2a + 3)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - a^2 + 2a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a) \cdot (x+a-2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a-2) = 2a-2$$

Entonces $f'(a) = 2a-2$, siendo a un valor cualquiera de x , escribiremos : $f'(x) = 2x-2$ que es la relación de la **función derivada**.

Si estudiamos su signo, conoceremos el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función :

$$\text{sig } f'(x) \quad \frac{- - - - - 0 + + + + +}{1}$$

De acuerdo a lo visto esto significa que la función decrece hasta el 1, en 1 tiene un mínimo relativo de tangente horizontal (¡el vértice de la parábola!), y luego crece. Más adelante construiremos una tabla de funciones derivadas, evitando el cálculo de un límite para obtener la función derivada.

Ejemplo: Hallemos la función derivada de $f(x) = Lx$ con $x > 0$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Lx - La}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{L(x/a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x/a) - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{a(x - a)} = 1/a$$

$\rightarrow f'(x) = 1/x$ si $x > 0$

NOTACIÓN : Escribimos : $(Lx)' = 1/x$ si $x > 0$

EJERCICIO1 : Hallar $f'(x)$, siendo $f(x) = e^x$

CRECIMIENTO, MÁXIMO Y MÍNIMO RELATIVO.

DEFINICIONES:

1) f es estrictamente creciente en $a \leftrightarrow \exists E(a, \delta) / \forall x \in E_{-}^{*}(a, \delta) \rightarrow f(x) < f(a)$
 ($f \uparrow$ en a)

$$\forall x \in E_{+}^{*}(a, \delta) \rightarrow f(x) > f(a)$$

2) f es estrictamente decreciente en $a \leftrightarrow$
 ($f \downarrow$ en a)
 (completar definición y hacer figura)

3) f tiene un mínimo relativo en $a \leftrightarrow \exists E(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \rightarrow f(x) > f(a)$

4) f tiene un máximo relativo en $a \leftrightarrow \dots\dots\dots$

TEOREMA : si $f'(a) > 0 \rightarrow f \uparrow$ en a

Demostración: por hipótesis y definición de derivada: $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) > 0$

$\exists E(a, \delta) / \forall x \in E^*(a, \delta) \rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$

sea $x \in E^*(a, \delta)$, por lo anterior : $\left. \begin{matrix} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \\ x-a < 0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{regla.designo}} \begin{matrix} f(x)-f(a) < 0 \\ \downarrow \\ f(x) < f(a) \end{matrix}$

si $x \in E^*(a, \delta) \rightarrow \left. \begin{matrix} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \\ x-a > 0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{regla.designo}} \begin{matrix} f(x)-f(a) > 0 \\ \downarrow \\ f(x) > f(a) \end{matrix}$

$\xrightarrow{\text{por.def}} f \uparrow$ en a

EJERCICIO2 : Verdadero o Falso? (si V : demostrar, si F: contraejemplo)

- 1) si $f'(a) < 0 \rightarrow f \downarrow$ en a
- 2) si $f \uparrow$ en $a \rightarrow f'(a) > 0$
- 3) si f tiene un mínimo relativo en $a \rightarrow f'(a) = 0$
- 4) si f tiene un máximo relativo en a y $\exists f'(a) \rightarrow f'(a) = 0$
- 5) si $f'(a) = 0 \rightarrow f$ tiene un máximo o un mínimo relativo en a .

RELACIÓN CONTINUIDAD – DERIVABILIDAD/ PUNTOS SINGULARES

Teorema : si f es derivable en $a \Rightarrow f$ continua en a

Dem : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a) + f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} (x-a) + f(a) \right] \stackrel{\text{teos.lím.}}{=} f(a)$
Por def $\rightarrow f$ continua en a suma y prod.

Teorema contrarrecíproco : si f no es continua en $a \rightarrow f$ no es derivable en a
(equivalente al anterior)

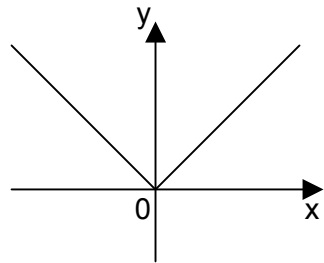
Observación importante : El recíproco del teorema demostrado es falso :

Si f es continua → f es derivable es FALSO.

Veremos dos contraejemplos que demuestran esto :

1) Sea $f : f(x) = |x|$ def.cont.
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0) \rightarrow f \text{ es cont. en } 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \text{def.deriv.} \rightarrow f \text{ no deriv. en } 0$$



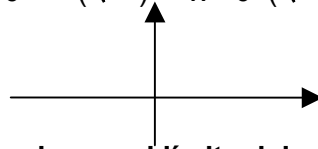
Los límites anteriores son las pendientes de las semitangentes en $(0, f(0))$

2) Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$ def.cont.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0) \rightarrow f \text{ cont. en } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty$$

→ f no es derivable en 0.



Observación : la interpretación gráfica de que el límite del cociente incremental es : tangente vertical en $(a, f(a))$.

ESTUDIO DE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD EN UN PUNTO :

De acuerdo a lo visto, podemos empezar estudiando la continuidad en a

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= f(a) \xrightarrow{\text{def. cont.}} f \text{ continua en } a \\ &= \infty \text{ o no existe } \xrightarrow{\text{def. cont.}} f \text{ no cont. en } a \end{aligned} \right\}$$

No cont. en a · f no derivable en a
 Si f Cont. en a → debo estudiar derivabilidad.

Para estudiar derivabilidad en a, aplico la def., por tanto debo calcular: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

En la práctica, en oportunidades el cálculo de ese límite supone calcular
 Ambos límites laterales : $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, si ambos son iguales a un mismo **número**,
 la función es derivable, siendo ese número $f'(a)$.

En caso de ser f cont. en a (si no es cont., ya no es derivable), los límites anteriores son iguales a los siguientes : $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f'(x)$, los cuales en oportunidades son más fáciles de calcular.

EJEMPLO: Sea $f(x) = \begin{cases} Lx & \text{si } x > 1 \\ 2x-2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Estudiaremos continuidad y derivabilidad de f en 0 y en 1.

en 1 : $\left. \begin{array}{l} f(1) = 2(1)-2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x-2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} Lx = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{def. cont.}} f \text{ es continua en } a$

derivable $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-2-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{Lx-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{def. deriv.}} f \text{ no derivable en } a$

Observación : Teniendo en cuenta que : $(Lx)' = 1/x$ (deducción hecha en ejemplo) , y que $(2x-2)' = 2$ (deducción a cargo del lector), como se dijo anteriormente estos últimos límites, en virtud de que f es continua en a, pueden calcularse haciendo los límites laterales de $f'(x)$:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2$ Entonces vemos que estos límites dieron los mismos resultados calculados por este otro método que en este caso nos evitó las indeterminaciones.
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} 1/x = 1$

Estos límites nos dan las pendientes de las semitangentes en 1^\pm

En 0 : $\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x-2) = -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{def. cont.}} f \text{ no es continua (discontinua) en } 0$

contrarrec.teo.
cont.-deriv.

f no es derivable en 0

Observación : Veremos que ocurre si estudiamos en 0 los $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x)$

Tendremos en cuenta que $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, cuya deducción dejamos como ejercicio.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^{2x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2$$

Esto indica que las semitangentes laterales en 0 tienen igual pendiente, sin embargo **al ser f discontinua, como ya vimos no es derivable**. En este caso, (de discontinuidad) **los límites de $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ no dan iguales a los de $f'(x)$** .

Por ello en este caso el hecho de ser iguales los $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x)$, no implica derivabilidad en 0.

PUNTOS SINGULARES : A puntos en los cuales la función es continua pero no derivable, (como los casos anteriores), se les llama puntos singulares.

Clasificación :

1) Puntos angulosos : Son aquellos en los cuales :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \neq \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\downarrow$$

$$m_t^-$$

$$\downarrow$$

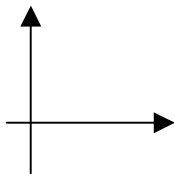
$$m_t^+$$

Estos dos límites son las pendientes de las semitangentes laterales en $(a, f(a))$

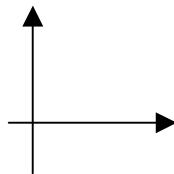
2) Puntos de tangente vertical : Son aquellos en los que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$

$$x \rightarrow a \quad x - a$$



punto de inflexión
de tangente vertical



puntos de retroceso

