Segunda Prueba Sumativa de Matemática 6º M 4 Prof. Saúl Tenenbaum
Curso Anual 11/10/07 Liceo Nº 3 Nocturno Dámaso Antonio Larrañaga.

1) Sea una función g de la cual se sabe que $\lim_{x \to 3} \frac{g(x)-g(3)}{2x-6} = 4$ y además $g(3) = -5$.

Indicar, justificando, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) La ecuación de la recta tangente a $g(x)$ en $x = 3$ es $y = 8x - 5$

b) g es una función creciente en un entorno de $x = 3$.

c) $\lim_{x \to 3} g(x) = 8$

2) a) Estudio analítico y representación gráfica de $f: f(x) = \frac{x}{Lx}$

b) Indicar, justificando, si la función f es inyectiva y/o sobreyectiva. Hallar el recorrido de la misma.

c) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de inflexión.

3) Hallar el signo de $m: m(x) = (L|x|)^2 - 4.L|x| + 3$

$\boxed{\text{HOJA } 1}$

1) a) $\lim_{x \to 3} \frac{g(x)-g(3)}{2x-6} = \lim_{x \to 3} \frac{g(x)-g(3)}{2(x-3)} = \frac{g'(3)}{2} = 4$

$// \; g'(3)$

ENTONCES $g'(3) = 8$

$\Rightarrow$ g ES DERIVABLE EN $x=3$. $\Rightarrow$ g ES CONTINUA EN 3.

$\boxed{y = g'(a)(x-a) + g(a)}$ ECUACIÓN DE LA TANGENTE A $g(x)$ EN $x=a$

$y = g'(3)(x-3) + g(3)$
$y = 8(x-3) + (-5)$
$y = 8x - 24 - 5$
$y = 8x - 29$ $\Rightarrow$ RESPUESTA (a) FALSA

b) $g'(3) = 8 \Rightarrow g'(3) > 0 \Rightarrow$ g ES CRECIENTE EN UN ENTORNO DE 3. RESPUESTA (b) VERDADERA

c) g DERIVABLE EN $x=3 \Rightarrow$ g CONTINUA EN $x=3 \Rightarrow$
$\lim_{x \to 3} g(x) = g(3) = -5$ $\Rightarrow$ RESPUESTA (c) FALSA

2) $f: f(x) = \frac{x}{Lx}$ EXISTE SI $x \geq 0$

$Lx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D(f) = \mathbb{R}^+ - \{1\} = \{x / x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \text{ y } x \neq 1\}$

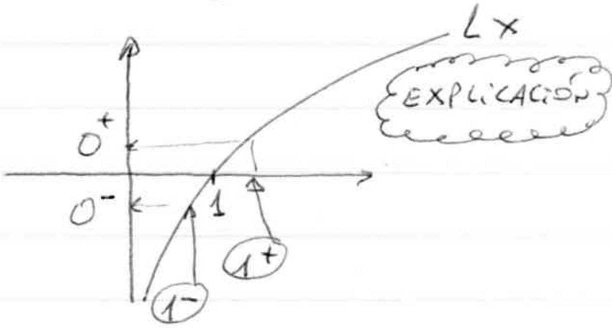
CONTINUIDAD:

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x}{Lx} = +\infty$ $\quad (x \to 1,\ Lx \to 0^+)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{Lx} = -\infty$ $\quad (x \to 1,\ Lx \to 0^-)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{Lx} = 0^-$ $\quad (x \to 0^+,\ Lx \to -\infty)$

RIAS

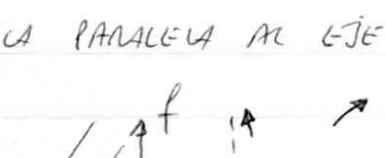


$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{Lx} = +\infty$ POR ORDENES

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{Lx}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{Lx} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{Lx} = 0$$

$\Rightarrow$ HAY DIRECCIÓN ASINTÓTICA PARALELA AL EJE O

CRECIMIENTO:



LA GRÁFICA HASTA AHORA...

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot Lx - x \cdot (Lx)'}{(Lx)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot Lx - x \cdot \frac{1}{x}}{(Lx)^2}$$

RECORDAR QUE $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

$5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

$x \cdot \frac{1}{x} = 1$

$$f'(x) = \frac{Lx - 1}{(Lx)^2}$$

HOJA 3

SIGNO DE $f'(x)$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & \nexists\ \searrow - & \nexists\ \searrow - & 0 \nearrow + & \\ \hline 0 & & 1 & & e \end{array}$$

MÍNIMO

$f(e)=\frac{e}{Le}$

$Lx-1=0$

$Lx=1$

$x=e$

$f(e)=e$

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN:

$Lx=0$

$x=1$

$$f''(x)=\frac{(Lx-1)'\cdot(Lx)^2-(Lx-1)((Lx)^2)'}{(Lx)^4}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(Lx)^2-(Lx-1)\cdot 2(Lx)\cdot\frac{1}{x}}{(Lx)^4}$$

REPASO:

f	f'
x	1
x^2	$2x$
u^2	$2u\cdot u'$
$(Lx)^2$	$2\cdot(Lx)\cdot\frac{1}{x}$

$$f''(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\cancel{Lx}\left[Lx-(Lx-1)\cdot 2\right]}{(Lx)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f''(x)=\frac{Lx-2Lx+2}{x(Lx)^3}=\frac{-Lx+2}{x(Lx)^3}$$

SIGNO $f''(x)$

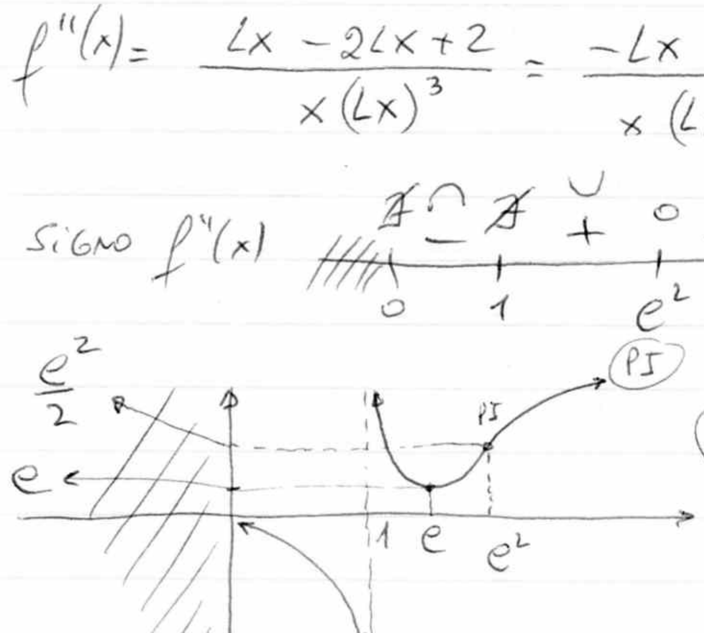
$$\begin{array}{c|c|c|c} & \nexists\ \cap - & \nexists\ \cup + & 0\ \cap - \\ \hline 0 & 1 & e^2 & \end{array}$$

$-Lx+2=0$

$-Lx=-2$

$Lx=2$

$x=e^2$



$f(e^2)=\frac{e^2}{Le^2}=\frac{e^2}{2}$

INYECTIVA: NO

SOBREYECTIVA: NO

RECORRIDO $(f)=(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$

ECUACIÓN DE LA TANGENTE EN EL P.I

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=f'(e^2)(x-e^2)+f(e^2)$

$y=\frac{1}{4}(x-e^2)+\frac{e^2}{2}$ ✓

$f'(e^2)=\frac{Le^2-1}{(Le^2)^2}$

$\boxed{\text{HOJA 4}}$

3) $m(x) = (L|x|)^2 - 4L|x| + 3$

HACEMOS EL CAMBIO DE VARIABLE $L|x| = z$

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.1.3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{cases}$$

AHORA DESHACEMOS EL CAMBIO DE VARIABLE:

$$L|x| = 1 \iff |x| = e^1 \iff x = \pm e$$
$$L|x| = 3 \iff |x| = e^3 \iff x = \pm e^3$$

EXISTENCIA: $x \neq 0 \Longrightarrow D(m) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

SGN $m(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$
		$-e^3$		$-e$		0		e		e^3	
